УДК: 517.95, 517.98

MSC2010: 35D30, 35D35, 35F15

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

© Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация
e-mail: *kopachevsky@list.ru, radomirskaya@mail.ru*

Mixed Boundary Value Transmission Problems.

Kopachevsky N. D., Radomirskaya K. A.

Abstract.

A common approach to the abstract boundary value problems is considered on the basis of an Abstract Green's Identity. Some examples of areas docked configurations for interfacing problems are considered on the basis of the generalized Green's Identity for the Laplace operator (in particular the configuration of "three sliced watermelon" is considered). The initial non-homogeneous problem interface is divided into four auxiliary problems. Heterogeneity exists only in one place in these tasks, i.e., at the equation or in the boundary condition. We find a weak solution of every problem with the help of the corresponding Green's Identity. Theorems on existence and uniqueness of each solution are proved. At the end of the article we get the conclusion that the solution of the original problem is the sum of the solutions of four auxiliary problems.

We consider the solution of the transmission problem

$$\begin{aligned} u_1 - \triangle u_1 &= f_1 \quad (in\ \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\text{on } \Gamma_{11}),\\ u_2 - \triangle u_2 &= f_2 \quad (in\ \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\text{on } \Gamma_{22}),\\ u_3 - \triangle u_3 &= f_3 \quad (in\ \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\text{on } \Gamma_{33}). \end{aligned}$$

Jumps of functions and derivatives of the external boundaries of the normals are defined on the joint boundary

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 &= \varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} \ (\text{on } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 &= \varphi_{23}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} \ (\text{on } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\ \gamma_{13}u_3 - \gamma_{31}u_1 &= \varphi_{31}, \quad \partial_{13}u_3 + \partial_{31}u_1 = \psi_{31} \ (\text{on } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

The solution to this problem is found in the form of a sum of solutions of auxiliary problems. We consider auxiliary problems of Zaremba, Steklov, the first and second Krein problems. We find a weak solution of each problem with corresponding Green's formula.

Keywords: *Green's Identity, weak solutions, boundary value problems, transmission problem, auxiliary problem, Lipschitz domain, derivative with respect to the outer normal.*

Введение

Работа является изложением доклада авторов в [12] и лекции, прочитанной в [13]. Исходным толчком для авторов заняться исследованием краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения стали работы М. С. Аграновича (см. [10]–[3]) и его лекции в ежегодной «Крымской осенней математической школе — КРОМШ» (Ласпи–Батилиман). С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания жидкости в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался первый из авторов статьи (см. [4]–[2]), требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, в частности, в липшицевых областях.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Данная статья посвящена применению общего подхода к изучению абстрактных смешанных краевых и спектральных задач сопряжения к различным конфигурациям пристыкованных областей в задачах сопряжения с использованием обобщенной формулы Грина, в основном для оператора Лапласа. Другие аналогичные задачи математической физики, гидродинамики, теории упругости и т. д. исследуются по этой предлагаемой общей схеме. Приводятся формулировки обобщенной формулы Грина на основе оператора Лапласа. Общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения приводится на примере конфигурации пристыкованных областей, которую авторы для простоты называют "трижды разрезанный арбуз" (Рис. 1).

Авторы благодарят М. С. Аграновича за многочисленные обсуждения данного круга проблем и полезные советы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

1. Основные формулы Грина

Будем считать, что липшицева граница Γ области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ односвязна. Разобьем её на односвязные открытые части $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Такое разбиение называют разбиением на липшицевы куски.

Как известно, функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ не всегда продолжимы нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [1], с. 78). Введем важные понятия, связанные с этим обстоятельством. Пусть $r(x)$, $x \in \Gamma_k$, — гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки $x \in \Gamma_k$ до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, множество (линеал) в $H^s(\Gamma)$, состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [8], с. 76, $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ — это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, для которых имеется продолжение нулём вне Γ_k в классе $H^s(\Gamma)$.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}\varphi \in L_2(\Gamma_k)\}.$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (которая наследуется из $H^{1/2}(\Gamma)$) на классе $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_k)}.$$

□

Лемма 2. *При любом $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leqslant 1$, пространства $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ и $H^{-s}(\Gamma_k)$ дуальны относительно спаривания в $L_2(\Gamma_k)$. В частности,*

$$(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1}$$

□

Как хорошо известно, пространство $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой имеет ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega), \tag{2}$$

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\},\ H^1_h(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v - \Delta v = 0\}. \tag{3}$$

Для простоты $H^1_h(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических элементов из $H^1(\Omega)$.

При исследовании линейных смешанных краевых задач, содержащих заданные функции как в уравнениях, так и в краевых условиях на разных частях границы, естественно решения таких задач разыскивать в виде суперпозиции решений вспомогательных краевых задач, в которых заданные функции (неоднородности) содержатся лишь в одном месте, т. е. в уравнении либо в одном из краевых условий. В связи с этим при использовании обобщенных формул Грина следует выделять такие множества (подпространства) из $H^1(\Omega)$, для которых указанное свойство суперпозиции имеет место.

Переходя к рассмотрению этого подхода, введем следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{4}$$

$$\widehat{H}^{1}(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^{l} H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1_h(\Omega) : \gamma u = 0 \text{ на } \Gamma\backslash\Gamma_k\} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma),\ k = \overline{1,l}. \tag{6}$$

Определение 1. Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом первого типа по отношению к разбиению* $\Gamma = \partial\Omega$ *на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *если для любого* k *элемент* $\gamma_k u = \rho_k\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, *т. е. он продолжи́м нулем на всю* Γ *в классе* $H^{1/2}(\Gamma)$. $\square$

Нетрудно видеть, учитывая свойства (1), что регулярным следом первого типа обладают слабые решения $w \in H^1_h(\Omega)$ смешанной краевой задачи

$$w - \Delta w = 0 \ (\text{в } \Omega),\ w = 0 \ (\text{на } \Gamma\backslash\Gamma_k),\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что, согласно определениям (4)–(6), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ получаем представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H^1_0(\Omega),\ u_k \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \gamma_k u_k =: \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \gamma_k u_j = 0 \quad (k \neq j),\ j,k = \overline{1,l}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулём на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$\langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\, \eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{7}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{8}$$

$\square$

Рассмотрим другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы можно было использовать и краевые условия Неймана либо Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, будем считать, что выполнены следующие свойства:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k,\ (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}; \tag{9}$$

и для операторов $p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k$ имеем соотношения

$$p_k = \omega_k \rho_k,\ k = \overline{1,l},\ \rho_k \omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,l},\ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{10}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем.* Предполагается также, что $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ и $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*,\ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*,\ \omega_k^* : \widehat{(G_+)}_k^{\,*} \to (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}, \tag{11}$$

где ω_k^* — ограниченный оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^{\,*}$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — ограниченный оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 2. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия существования абстрактной формулы Грина, условие (9), а также условие (10) либо условие (11). Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k},\quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k,\quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*,$$

где ρ_k и ω_k^* — операторы со свойствами (10),(11). $\square$

Вернёмся снова к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Введем одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [6] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [11], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3. *(см. В. С. Рычков [6], а также М. С. Агранович [11]). Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Тогда существует линейный оператор ω_k (оператор В. С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\omega_k\varphi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c_k\|\varphi_k\|_{H^s(\Gamma_k)},\ \forall\varphi_k \in H^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1,$$

причем c_k не зависит от s. □

Введем теперь операторы сужения и продолжения такие, что для них выполнены общие требования из теоремы 2. Пусть $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор сужения ($\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1$), а $\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженный ему ограниченный *оператор продолжения нулем:*

$$\rho_k^*\psi_k = \begin{cases} \psi_k \text{ (на } \Gamma_k), & \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \\ 0 \text{ (на } \Gamma\backslash\Gamma_k). \end{cases}$$

Введем также ограниченный оператор продолжения (оператор Рычкова, см. [6]) $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \,—$$

ограниченный *оператор сужения.*

Введем ещё пространство

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{l}\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{12}$$

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\rho_k^*\psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^*\rho_k^*\psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l},$$

а потому в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2,\ p_k^*p_j^* = 0\ (k \neq j),\ \sum_{k=1}^{l} p_k^* = (\check{I}_-),$$

где $(\check{I}_-)$ — единичный оператор в $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (9)–(11), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k),\ G_k = L_2(\Gamma_k),\ (G_+)^*_k = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}.$$

Введем теперь по аналогии с (4)–(6) классы функций, связанных не с задачей Дирихле, а с задачей Неймана. Именно введем пространство (12), а также пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})^l_{k=1} \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{13}$$

$$\check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H^1_h(\Omega) \cap H^1_{\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega), \tag{14}$$

$$H^1_{\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = 0\}. \tag{15}$$

Определение 2. Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом второго типа*, если для любого $k \in \overline{1,l}$ элемент

$$\partial_k u = \omega^*_k \partial u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$. □

Согласно определениям (13)–(15) элементы из $\check{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \check{H}^1(\Omega)$ имеет место представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H^1_0(\Omega),\ u_k \in \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u_j = 0\ (k \neq j),\ k, j \in \overline{1,l}.$$

В качестве следствия из теоремы 2 и проведенных выше построений приходим к такому выводу.

Теорема 3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $\check{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\, \eta,\ u \in \check{H}^1(\Omega), \tag{16}$$

$$\gamma_k \eta := \eta\, |_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{17}$$

□

Рассмотрение этого параграфа показывает, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач при исследовании классических проблем следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

2. Общая схема рассмотрения задач сопряжения

2.1. **К постановке задачи.** В этой работе будет рассмотрен простой пример задачи сопряжения для проблемы математической физики, порожденной оператором Лапласа, точнее дифференциальным выражением $u - \Delta u$. Будем считать, что конфигурация областей, в которых рассматривается эта задача, представляет «трижды разрезанный арбуз» (Рис. 1).

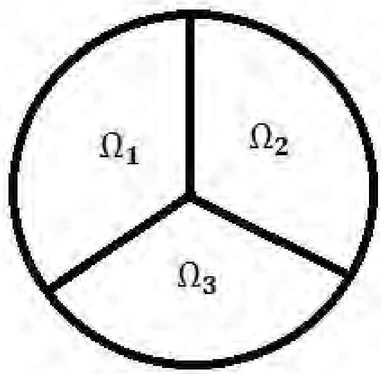

Рис.1

Обозначим через $\Gamma_{jj},\ j = \overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} ($k \neq j$) — ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Будем обозначать через $\gamma_{kj}u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ — соответствующую производную по внешней нормали.

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей $\Omega_j,\ j = \overline{1,3}$.

Требуется найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j),\ j = \overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$\begin{aligned} &u_1 - \triangle u_1 = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_2 - \triangle u_2 = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_3 - \triangle u_3 = f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}). \end{aligned} \tag{18}$$

На границах стыка заданы скачки функций и нормальных производных:

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\ &\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{23}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} \text{ (на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\ &\gamma_{13}u_3 - \gamma_{31}u_1 = \varphi_{31}, \quad \partial_{13}u_3 + \partial_{31}u_1 = \psi_{31} \text{ (на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь f_j — заданные функции в $\Omega_j,\ j = \overline{1,3}, \varphi_j$ — заданные функции на внешних границах $\Gamma_{jj},\ j = \overline{1,3}$, функции φ_{21}, φ_{32} и φ_{13} задают разрывы следов, а ψ_{21}, ψ_{32} и ψ_{13} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Будем искать слабое решение задачи (18)–(19) в виде

$$u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k).$$

В силу линейности задачи будем искать это решение в виде суммы решений четырех вспомогательных задач, содержащих неоднородности лишь в одном месте, т. е. либо в уравнении, либо в краевом условии.

2.2. **Первая вспомогательная задача (задача Зарембы).** Пусть $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}; u_{13})^{\tau}$ — решение следующей задачи

$$\begin{aligned} &u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{21}u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31}u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}),\\ &\partial_{12}u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{32}u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}),\\ &\partial_{13}u_{13} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{13} = \Gamma_{31}), \quad \partial_{23}u_{13} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{aligned}$$

В этой задаче уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия на внешних границах неоднородные.

Мы имеем три распадающиеся задачи Зарембы. Решим первую задачу для u_{11}.

$$\begin{aligned} &u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{21}u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31}u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{21}$$

Будем считать, что $u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1)$, тогда $\gamma_{11}u_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_{11}),\ \ \partial_{11}u_{11} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11})$.

Введем подпространство

$$\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1) = \{u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1) : \partial_{21}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}),\ \ \partial_{31}u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31})\}. \tag{22}$$

Для задачи (21) естественно воспользоваться формулой Грина в следующем виде

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{11} - \triangle u_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_1\eta_1, \partial_{11}u_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{11})} +$$

$$+\langle\gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle\gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}, \quad \forall\eta_1, u_{11} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1).$$

Будем искать решение u_{11} в виде суммы $u_{11} = v_1 + w_1$. Запишем задачу Дирихле для v_1:

$$v_1 - \triangle v_1 = 0 \ (\Omega_1), \ \ v_1|_{\partial\Omega_1} = \widehat{\varphi}_1 = \mathscr{E}\varphi_1 \ (\partial\Omega_1),$$

где $\mathscr{E}$ — универсальный оператор продолжения В. С. Рычкова (см. [6]), $\mathscr{E} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\mathscr{E}\varphi_1 \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, причем

$$\|\widehat{\varphi}_1\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} \leqslant c_1\|\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{11})}.$$

Так как в теории абстрактной формулы Грина существует взаимно-однозначное соответствие $G_+ \underset{\gamma_m^{-1}}{\xrightarrow{\gamma_m}} M$, то существует решение

$$v_1 = \gamma_1^{-1}\widehat{\varphi}_1 = \gamma_1^{-1}\mathscr{E}\varphi_1, \ v_1 \in H^1_h(\Omega_1)$$

и $\|v_1\|_{H^1_h(\Omega_1)} \leqslant c_2\|\mathscr{E}\varphi_1\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)}$.

Рассмотрим задачу Неймана для w_1, которая получается из (20) с учетом уравнения и граничных условий для v_1:

$$\begin{array}{ll} w_1 - \triangle w_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11}w_1 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{21}w_1 = -\partial_{21}v_1 = \widetilde{\psi}_{21} \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), & \partial_{31}w_1 = -\partial_{31}v_1 = \widetilde{\psi}_{31} \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}), \end{array}$$

где $\widetilde{\psi}_{21} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})$, $\widetilde{\psi}_{31} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31})$ — известные функции. Запишем формулу Грина для $\eta_1, \ w_1 \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$:

$$(\eta_1, w_1)_{H^1(\Omega_1)} = \langle\gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle\gamma_{31}\eta_1, \widetilde{\psi}_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}. \tag{23}$$

Оценим по модулю функционал $\langle\gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}$; имеем

$$\begin{aligned} |\langle\gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}| &\leqslant \|\gamma_{21}\eta_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{12})} \cdot \|\widetilde{\psi}_{21}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12})} \leqslant \\ &\leqslant c_1\|\eta_1\|_{H^1(\Omega_1)} \cdot \|\widetilde{\psi}_{21}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12})}. \end{aligned} \tag{24}$$

Он линейный и ограниченный. Для $\langle\gamma_{31}\eta_1, \widetilde{\psi}_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}$ можно проделать аналогичные выкладки.

Таким образом, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала правая часть в формуле Грина (23) — линейный ограниченный функционал относительно η_1 в $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Значит, существует единственное решение $w_1 \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$.

Рассмотрим наряду с (21) следующую вспомогательную задачу Неймана:

$$u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \ \partial_{11}u_{11} = \psi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \ \partial_{21}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{25}$$

$$\partial_{31}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}).$$

Её слабое решение определяем из тождества, следующего из (23):

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11}\eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \ \forall \eta_1 \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{26}$$

Так как для элементов η_1 из $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ выполнено свойство $\gamma_{11}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$, то правая часть в (26) будет линейным ограниченным функционалом в $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\psi_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}).$$

В этом случае задача (25) имеет единственное слабое решение

$$u_{11} =: T_{11}\psi_1, T_{11} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}); \check{H}^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1)), \tag{27}$$

$$\check{H}^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1) = \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1).$$

Введем теперь оператор

$$C_{11} := \gamma_{11}T_{11} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}); H^{1/2}(\Gamma_{11})), \tag{28}$$

который называют оператором Стеклова.

Лемма 4. *Операторы*

$$\gamma_{11} : H^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma_{11}), \ \ T_{11} : \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}) \to \check{H}^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1) \tag{29}$$

взаимно сопряжены, а оператор из 28 обладает свойством положительности:

$$\langle C_{11}\psi_1, \psi_1 \rangle_{L_1(\Gamma_{11})} = \|u_{11}\|^2_{H^1(\Omega_1)}, \ \ u_{11} = T_{11}\psi_1. \tag{30}$$

При этом оператор

$$C^{-1}_{11} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}) \tag{31}$$

является оператором гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_{11}); L_2(\Gamma_{11}))$.

Доказательство. Свойство взаимной сопряженности (29) следует непосредственно из (26):

$$(\eta_1, T_{11}\psi_1)_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11}\eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \ \forall \eta_1 \in H^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1), \ \forall \psi_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}). \tag{32}$$

Отсюда получаем свойство положительности C_{11}:

$$\langle C_{11}\psi_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} = (T_{11}\psi_1, T_{11}\psi_1)_{H^1(\Omega_1)} = \|u_{11}\|^2_{H^1(\Omega_1)}.$$

□

Значит, оператор C_{11} имеет обратный оператор C^{-1}_{11}, заданный на области значений $\mathscr{R}(C_{11}) = H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Тогда $\psi_1 = C^{-1}_{11}\varphi_1$, и решение имеет вид:

$$u_{11} = T_{11}\psi_1 = T_{11}C^{-1}_{11}\varphi_1 = T_{11}(\gamma^{-1}_{11}T_{11})^{-1}\varphi_1 = T_{11}T^{-1}_{11}\gamma^{-1}_{11}\varphi_1 = \gamma^{-1}_{11}\varphi_1. \tag{33}$$

Учитывая предыдущие выкладки, получаем, что слабое решение задачи (20) представляется в виде

$$u_{11} = \gamma_{11}^{-1}\varphi_1, \ \ \gamma_{11}^{-1} \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11});\ \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)).$$

Так как правая часть (23) — сумма линейных ограниченных функционалов, а следовательно линейный ограниченный функционал, то существует единственное решение $u_{11} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ для $\forall\ \varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Аналогичные выкладки можно проделать для решений $u_{12},\ u_{13}$ и получить финальную формулу

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ k = \overline{1,3}.$$

Получаем следующий результат.

Теорема 4. *Каждая из задач Зарембы имеет единственное слабое решение из подпространства* $\check{H}^1_{\Gamma_{kk}}(\Omega_k),\ k = \overline{1,3}$, *тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}.$$

При этом решение имеет вид

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,$$

где $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), \check{H}^1_{\Gamma_{kk}}(\Omega_k)),\ k = \overline{1,3}.$ □

2.3. **Вторая вспомогательная задача (задача Стеклова).** Сформулируем вспомогательную задачу типа Стеклова для набора функций $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ в следующем виде

$$\begin{array}{ll} u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11}u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), & \gamma_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\ u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), & \gamma_{33}u_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{array} \tag{34}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{12} := \varphi_{12} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12}, \\ \partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{23} := \varphi_{23} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13}, \\ \partial_{32}u_{22} + \partial_{23}u_{23} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{13}u_{23} - \gamma_{31}u_{21} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{13}u_{13} + \gamma_{31}u_{11}, \\ \partial_{13}u_{23} + \partial_{31}u_{21} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{gathered}$$

Здесь все уравнения однородные, внешние условия Дирихле однородные, производные по нормали на границе стыка противоположно направлены. Имеется разрыв лишь в условиях Дирихле на внутренних границах стыка, который задается функциями $\widetilde{\varphi}_{ij}$ с учетом построения решения на первом этапе.

Введем вспомогательные условия Неймана:

$$\partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} =: \chi_{12} \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),$$

$$\partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} =: \chi_{23} \ \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),$$

$$\partial_{13}u_{23} = -\partial_{31}u_{21} =: \chi_{31} \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).$$

Если функции $\chi_{jk} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{jk})$ известны, то для нахождения
$u_{2k}, k = \overline{1,3}$ возникают три задачи:

1. $u_{21} - \triangle u_{21} = 0$ (в Ω_1), $\gamma_{11}u_{21} = 0$ (на Γ_{11}), $\partial_{21}u_{21} = \chi_{12}$ (на $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$), $\partial_{31}u_{21} = -\chi_{31}$ (на $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}$), $u_{21} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$;
2. $u_{22} - \triangle u_{22} = 0$ (в Ω_2), $\gamma_{22}u_{22} = 0$ (на Γ_{22}), $\partial_{12}u_{22} = -\chi_{12}$ (на $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$), $\partial_{32}u_{22} = \chi_{23}$ (на $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$), $u_{22} \in \check{H}^1_{\Gamma_{22}}(\Omega_2)$;
3. $u_{23} - \triangle u_{23} = 0$ (в Ω_3), $\gamma_{33}u_{23} = 0$ (на Γ_{33}), $\partial_{13}u_{23} = \chi_{31}$ (на $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}$), $\partial_{23}u_{23} = -\chi_{23}$ (на $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$), $u_{23} \in \check{H}^1_{\Gamma_{33}}(\Omega_3)$.

Далее разобьем каждое из u_{2k}, $k = \overline{1,3}$, на два слагаемых (см. доказательство теоремы 2.1), определим их слабые решения и получим, что

$$\begin{aligned} u_{21} &= T_{21}(\chi_{12}) + T_{31}(-\chi_{31}), \\ u_{22} &= T_{12}(-\chi_{12}) + T_{32}(\chi_{23}), \\ u_{23} &= T_{13}(\chi_{31}) + T_{23}(-\chi_{23}), \end{aligned} \tag{35}$$

где T_{ij} — соответствующие операторы, $T_{ij} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}); \ \check{H}^1(\Omega_k))$. Теперь χ_{ij}, $i,j = \overline{1,3}$, находим из системы уравнений, которая является условиями сопряжения Дирихле в задаче (34):

$$\gamma_{21}(T_{21}\chi_{12} - T_{31}\chi_{31}) - \gamma_{12}(-T_{12}\chi_{12} + T_{32}\chi_{23}) = \widetilde{\varphi}_{12},$$

$$\gamma_{32}(-T_{12}\chi_{12}) + T_{32}\chi_{23}) - \gamma_{23}(T_{13}\chi_{31} - T_{23}\chi_{23}) = \widetilde{\varphi}_{23},$$

$$-\gamma_{31}(T_{21}\chi_{12} - T_{31}\chi_{31}) + \gamma_{13}(T_{13}\chi_{31} - T_{23}\chi_{23}) = \widetilde{\varphi}_{31}.$$

Пусть $\chi = (\chi_{12};\chi_{23};\chi_{31})^\tau$, $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_{12};\widetilde{\varphi}_{23};\widetilde{\varphi}_{31})^\tau$. Получаем систему уравнений для операторной матрицы типа Стеклова: $C\chi = \widetilde{\varphi}$,
$C : H_- \to H_+$,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

где $C_{11} := \gamma_{21}T_{21} + \gamma_{12}T_{12}$, $C_{12} := -\gamma_{12}T_{32}$, $C_{13} := -\gamma_{21}T_{31}$, $C_{21} := -\gamma_{32}T_{12}$,
$C_{22} := \gamma_{32}T_{32} + \gamma_{23}T_{23}$, $C_{23} := -\gamma_{23}T_{13}$, $C_{31} := -\gamma_{31}T_{21}$, $C_{32} := -\gamma_{13}T_{23}$,
$C_{33} := \gamma_{31}T_{31} + \gamma_{13}T_{13}$. Изучим свойства оператора C.

1°. Операторы γ_{jk} и T_{jk} взаимно сопряжены.

Доказательство. Доказательство этого факта следует из определения слабого решения. Например, для u_{21} получаем слабое решение из пространства $\check{H}^1(\Omega_k)$ на основе формулы Грина:

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \triangle u_{21} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} +$$

$$+ \langle \gamma_{31}\eta_1, -\chi_{31} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})},\ \chi_{12} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}),\ \chi_{31} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31}).$$

В частности, для слабого решения u_{21} при $\chi_{31} = 0$ имеем:

$$(\eta_1, u_{21})_{\check{H}^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})},\ \forall \eta_1,\ u_{21} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1).$$

Следовательно, существует единственное $u_{21} = T_{21}\chi_{12}$:

$$(\eta_1, T_{21}\chi_{12})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}.$$

Таким образом, $(T_{21})^* = \gamma_{21}$. Аналогично для других сочетаний. Вообще имеем, как и в общей схеме, связанной с выводом абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств, $(\gamma_{jk})^* = T_{jk} = (\partial_{jk})^{-1}$. □

2°. Если считать, что C действует в $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{31})$, то $C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Gamma))$. Приведенное выше C есть его расширение по непрерывности на $H_- := \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{23}) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31})$, а $\mathscr{R}(C) = H_+ := H^{1/2}(\Gamma_{12}) \times H^{1/2}(\Gamma_{23}) \times H^{1/2}(\Gamma_{31})$.

3°. Оператор C обладает свойством положительности

$$\langle C\chi, \chi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)} \geqslant 0, \forall \chi \in H_-.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{pmatrix} \gamma_{21}T_{21} + \gamma_{12}T_{12} & -\gamma_{12}T_{32} & -\gamma_{21}T_{31} \\ -\gamma_{32}T_{12} & \gamma_{32}T_{32} + \gamma_{23}T_{23} & -\gamma_{23}T_{13} \\ -\gamma_{31}T_{21} & -\gamma_{13}T_{23} & \gamma_{31}T_{31} + \gamma_{13}T_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{12} \\ \chi_{23} \\ \chi_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi_{12} \\ \chi_{23} \\ \chi_{31} \end{pmatrix} =$$

$= \langle (\gamma_{21}T_{21} + \gamma_{12}T_{12})\chi_{12} - \gamma_{12}T_{32}\chi_{23} - \gamma_{21}T_{31}\chi_{31}, \chi_{12} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle -\gamma_{32}T_{12}\chi_{12} + (\gamma_{32}T_{32} + \gamma_{23}T_{23})\chi_{23} - \gamma_{23}T_{13}\chi_{31}, \chi_{23} \rangle_{L_2(\Gamma_{23})} + \langle -\gamma_{31}T_{21}\chi_{12} - \gamma_{13}T_{23}\chi_{23} + (\gamma_{31}T_{31} + \gamma_{13}T_{13})\chi_{31}, \chi_{31} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})} = \langle \gamma_{21}u_{21}, \partial_{21}u_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} - \langle \gamma_{12}u_{22}, -\partial_{12}u_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{32}u_{22}, \partial_{32}u_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{23})} - \langle \gamma_{23}u_{23}, -\partial_{23}u_{23} \rangle_{L_2(\Gamma_{23})} - \langle -\gamma_{31}u_{21}, \partial_{31}u_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})} + \langle \gamma_{13}u_{23}, \partial_{13}u_{23} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})}$.

Рассмотрим формулу Грина для решения u_{21}:

$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \triangle u_{21} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{11}\eta_1, \partial_{11}u_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})}, \forall \eta_1 \in \check{H}^1(\Omega_1)$.

Очевидно, что первое и второе слагаемые в правой части формулы Грина обращаются в ноль. Сделаем замену в оставшихся слагаемых $\eta_1 = u_{21}$. Получаем $(u_{21}, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \|u_{21}\|^2_{H^1(\Omega_1)} = \langle\gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle\gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}$.

А значит, с учетом аналогичных формул для u_{22}, u_{23},

$$\langle C\chi, \chi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)} \geqslant 0, \forall\chi \in H_-.$$

Отсюда следует, что оператор C ограниченно действует из H_- на H_+, и потому (по теореме Банаха) существует ограниченный оператор $C^{-1} \in \mathscr{L}(H_+;\ H_-)$. □

В итоге для исходной задачи Стеклова (34) получаем следующий результат.

Теорема 5. *Сформулированная вспомогательная задача Стеклова в условиях теоремы 4 имеет единственное слабое решение $u_{(2)} \in \check{H}^1(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}),\ \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}),\ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}).$$

Решения этой задачи имеют вид (35) , где χ_{ij} находятся по формуле

$$\chi = C^{-1}\widetilde{\varphi}.$$

□

Доказательство этого утверждения проведено в рассуждениях выше.

2.4. **Аналог первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна.** Сформулируем аналог первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна для набора функций $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau$:

$$\begin{aligned} &u_{31} - \triangle u_{31} = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{31} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{32} - \triangle u_{32} = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{33} - \triangle u_{33} = f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{33} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0, \quad \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\ &\gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0, \quad \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\ &\gamma_{13}u_{33} - \gamma_{31}u_{31} = 0, \quad \partial_{13}u_{33} + \partial_{31}u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

В этой задаче все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Введем в рассмотрение подпространство

$$\begin{aligned} H^1_\Gamma(\Omega) := \{u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) :\ &\gamma_{jj}u_j = 0 \ (\text{на } \Gamma_{jj}),\ j = \overline{1,3};\\ &\gamma_{jk}u_k - \gamma_{kj}u_j = 0 \ (\text{на } \Gamma_{jk}), \ \ j,k = \overline{1,3}\} \subset H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Запишем формулу Грина для задачи (36):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3}\langle \eta_k, u_{3k} - \triangle u_{3k}\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \tag{37}$$

$$+\langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})} +$$

$$+\langle \gamma_{13}\eta_3, \partial_{13}u_{33} + \partial_{31}u_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{13})}, \quad \forall \eta_k, u_{3k} \in H^1_\Gamma(\Omega_k).$$

Слабое решение определяем согласно тождеству

$$\sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_3k)_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{3}\langle \eta_k, f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)}, \forall\ \eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega_k). \tag{38}$$

На его основе для задачи (36) докажем следующее утверждение.

Теорема 6. *Первая вспомогательная задача С. Г. Крейна имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_\Gamma(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3) \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*.$$

В этом случае решение дается формулой

$$u_3 = A^{-1}f,$$

*где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega),\ L_2(\Omega))$,
$H^1_\Gamma(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H^1_\Gamma(\Omega))^*$. В частности, если*

$$f = (f_1; f_2; f_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (H^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство. При любых $\eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega)$ правая часть тождества (38) — линейный ограниченный функционал в пространстве $H^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*$. В этом случае по лемме Ф. Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве для любого $f \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*$ найдется единственный элемент $u_{(3)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ такой, при котором будет выполнено равенство (38). В курсе лекций [7] (применительно к этой задаче) были доказаны формулы

$$(\eta, u_{(3)})_{H^1_\Gamma(\Omega)} = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u_{(3)})_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, Au_{(3)}\rangle_{L_2(\Omega)},$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega),\ L_2(\Omega))$. Поэтому из (37) получаем

$$\sum_{k=1}^{3}\langle \eta_k, f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_{(3)})_{H^1_\Gamma(\Omega_k)} = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u_{(3)})_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \langle \eta, Au_{(3)} \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, \eta = (\eta_1;\ \eta_2;\ \eta_3) \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

Следовательно, $\langle \eta, f - Au_{(3)} \rangle_{L_2(\Omega)} = 0$, $\forall\ \eta \in H^1_\Gamma(\Omega)$. Так как η пробегает все $H^1_\Gamma(\Omega)$, то $(f - Au_{(3)})$ — нулевой функционал из $(H^1_\Gamma(\Omega))^*$ и $Au_{(3)} = f$.

Если

$$f \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

то формула (38) принимает вид

$$(\eta, f)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u_{(3)})_{H^1_\Gamma(\Omega)},$$

и в этом случае существует единственное обобщенное решение
$u_{(3)} = A^{-1} f$. □

2.5. **Аналог второй вспомогательной задачи С. Г. Крейна.** Рассмотрим аналог второй вспомогательной задачи Крейна для набора функций
$u_{(4)} := (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau$:

$$\begin{array}{lll} u_{41} - \triangle u_{41} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11} u_{41} = 0 & (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{42} - \triangle u_{42} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), & \gamma_{22} u_{42} = 0 & (\text{на } \Gamma_{22}), \\ u_{43} - \triangle u_{43} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), & \gamma_{33} u_{43} = 0 & (\text{на } \Gamma_{33}), \end{array} \tag{39}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, \quad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{12} & (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, \quad \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{23} & (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{13} u_{43} - \gamma_{31} u_{41} = 0, \quad \partial_{13} u_{43} + \partial_{31} u_{41} = \psi_{31} & (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Здесь уравнения однородные, на внешних границах условия Дирихле однородные, на внутренних границах следы функций совпадают, а производные по нормали терпят заданный разрыв.

Запишем формулу Грина для задачи (39):

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{4k} - \triangle u_{4k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^{3} \langle \gamma_{kk} \eta_k, \partial_{kk} u_{4k} \rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} +$$
$$+ \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_{41} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{12} \eta_2, \partial_{12} u_{42} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31} \eta_1, \partial_{31} u_{41} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})} +$$
$$+ \langle \gamma_{13} \eta_3, \partial_{13} u_{43} \rangle_{L_2(\Gamma_{13})} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \partial_{32} u_{42} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \langle \gamma_{23} \eta_3, \partial_{23} u_{43} \rangle_{L_2(\Gamma_{23})},$$

$\forall \eta_k, u_{3k} \in H^1_\Gamma(\Omega)$, $\ \varphi_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_{ij})$, $\ \psi_{ij} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij})$, $i, j = \overline{1,3}$.

С помощью формулы Грина определим слабое решение задачи (39):

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \psi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \psi_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \tag{40}$$
$$+ \langle \gamma_{13} \eta_3, (-\psi_{13}) \rangle_{L_2(\Gamma_{13})}, \forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)\ \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

В итоге рассмотрения этой задачи получаем следующий результат.

Теорема 7. *Вторая вспомогательная задача С. Г. Крейна имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{21} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \psi_{32} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{32}),\ \psi_{13} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{13}).$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = W_{21}\psi_{21} + W_{32}\psi_{32} + W_{13}\psi_{13}, \tag{41}$$

где $W_{ij}:\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \to H^1_h(\Omega_i),\ i,j=\overline{1,3}$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (см. [7])

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \min_{\gamma u=\varphi} \|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega)}.$$

Отсюда получаем, что при $\forall\ \eta \in H^1_\Gamma(\Omega)$ правая часть в (40) является линейным ограниченным функционалом $l_\psi(\eta)$ в $H^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия $\psi_{ij} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}),\ i,j=\overline{1,3}$. В самом деле,

$$|\langle \gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}| \leqslant \|\gamma_{21}\eta_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{21})} \cdot \|\psi_{12}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})} \leqslant \|\psi_{21}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})} \cdot \|\eta\|_{H^1_\Gamma(\Omega)}.$$

Аналогично для двух других случаев. И потому $l_\psi(\eta)$, т. е. правая часть тождества (40), — линейный ограниченный функционал в $H^1_\Gamma(\Omega)$.

Обратно, если $l_\psi(\eta)$ — линейный ограниченный функционал относительно $\eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega)$, то совокупность элементов $\{\gamma_{ij}\eta_i\}^3_{i,j=1}$ пробегает все $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$, когда η_i пробегают все $H^1_\Gamma(\Omega)$. Поэтому элемент $\psi = (\psi_{21};\psi_{32};\psi_{13})$ должен принадлежать пространству $(H^{1/2}(\Gamma_{ij}))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}),\ i,j=\overline{1,3}$. Поскольку $l_\psi(\eta)$ — линейный ограниченный функционал в $H^1_\Gamma(\Omega)$, то по лемме Ф. Рисса существует единственное решение $u_{(4)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ такое, что справедливо тождество (32).

Докажем теперь, что решение имеет вид (41). Для этого разобьем исходную задачу на три вспомогательные (оставим неоднородность в условиях Неймана лишь в одном месте). Рассмотрим решение первой вспомогательной задачи $u_{411} \in H^1_\Gamma(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Из формулы Грина получаем тождество для слабого решения

$$(\eta_1, u_{411})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})},\ \forall \eta \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

Отсюда, как и выше, получаем, что существует единственное слабое решение

$$u_{411} = W_{21}\psi_{21},\ W_{21}: \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}) \to H^1_h(\Omega).$$

Аналогично для двух других решений вспомогательных задач. Так как решение $u_{(4)}$ единственно, то оно имеет вид

$$u_{(4)} = u_{411} + u_{421} + u_{431} = W_{21}\psi_{21} + T_{32}\psi_{32} - T_{13}\psi_{13}.$$

$\square$

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи (18)–(19) сопряжения является следующее утверждение.

Теорема 8. *Исходная задача (18)–(19) имеет единственное слабое решение из пространства*

$$H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k)$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия теорем 2.1–2.4. Решение задачи (18)–(19) является суммой решений вспомогательных задач, рассмотренных в пп. 2.1–2.4. $\square$

С помощью данного подхода можно рассматривать задачи сопряжения для различных конфигураций областей. Общие выводы остаются неизменными.

Список литературы

1. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

   LIONS, J-L. and MEJENES, A. (1971) *Inhomogeneous boundary value problems and their applications.* Moscow: Mir.

2. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. and NGO ZUI KAN (1989) *Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

3. AGRANOVICH, M. S., VOITOVICH, N. N. and KATSENELENBANM, B. Z., Sivov, A. N. Generalized method of eigenoscillations in difraction theory / M. S. Agranovich, N. N.Voitovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov. — Berlin: Wiley–VCN, 1999. — 128 c.

4. KOPACHEVSKY, N. D. and KREIN, S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid-Birkhauser Verlag / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel–Boston–Berlin, 2001. — 384 c.

5. KOPACHEVSKY, N. D. and KREIN, S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid-Birkhauser Verlag / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel–Boston–Berlin, 2003. — 444 c.

6. RYCHKOV, V. S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains // J. London Math. Soc. — 1999, 60. — № 1. — С. 237–257.

7. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина: специальный курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О. Ф.", 2011. — 136 с.

   KOPACHEVSKY, N. D. (2011) *Abstract Green's formula: a special course of lectures.* Simferopol "Bondarenko".

8. Агранович, М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. — Москва: МЦНМО, 2013. — 379 с.

   AGRANOVICH, M. S. (2013) *Sobolev spaces , their generalizations and elliptic problems in domains with smooth and Lipschitz boundary.* Moscow: MTsNMO. 379.

9. AGRANOVICH, M. S. Sobolev spaces, their generalizations, and elliptic problems in smooth and lipschitz domains / M. S. Agranovich. — Springer International Publishing Switzerland, 2015. — 379 с.

10. Агранович, М. С. Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии / М. С. Агранович, Г. А. Амосов, М. Левитин // Российский журнал матем. физ. — 1999. — Т. 6. — № 3. — С. 247–281.

    AGRANOVICH, M. S., AMOSOV, G. A. and LEVITIN, M. (1999) Spectral problems for the Lame system in smooth and non-smooth domains with a spectral parameter in the boundary condition. *Russian Journal of Mathematical Physics.* 6 (3). p. 247–281.

11. AGRANOVICH, M. S. Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary // Russ. J. Math. Phys. — 2008, № 2. — С. 146–155.

12. Копачевский, Н. Д. Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V". — Ростов-на-Дону, 2015. — С. 211.

    KOPACHEVSKY, N. D. and Radomirskaya, K. A. (2015) Abstract mixed boundary conjugation problem. *International scientific conference "Modern methods and problems of operator theory and harmonic analysis and their applications"*. Rostov-on-Don. p. 211.

13. Копачевский, Н. Д. Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. — Батилиман (Ласпи), 2015. — С. 52.

    KOPACHEVSKY, N. D. and RADOMIRSKAYA, K. A. (2015) Abstract boundary and spectral conjugation problem. *XXVI Crimean autumn mathematical school–symposium on spectral and evolutionary problems.* Batiliman (Balaclava). p. 52.