УДК: 519.8
MSC2010: 90C09, 90C27, 90C29, 90C31

О РАДИУСЕ T_1-УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ С НОРМАМИ ГЕЛЬДЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ПАРАМЕТРОВ

© В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Просп. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь
e-mail: *vemelichev@gmail.com, kuzminkg@mail.ru*

On the T_1-stability Radius of a Multicriteria Linear Boolean Problem with Hölder Norms in Parameter Spaces.

Emelichev V. A. and Kuzmin K. G.

Abstract. Discrete optimization models of decision making are widespread in design, control, economics and many other fields of applied research. Many of the decision-making problems can be formulated as multicriteria Boolean problems. Solutions of the problems are reduced to a choice of variables values from a discrete set that are the best in some sense, which is determined by the physical or economical meaning. Pareto-optimal alternatives are usually regarded as the best solutions. One of the approaches to investigate these problems is the stability analysis carried out under the uncertainty assumption, which means that the given coefficients of the objective vector-function are known up to a certain accuracy degree or may change unpredictably. In these conditions, an investigation of the Pareto set behavior becomes topical since these investigations allow one to specify reliability limits of the decisions made.

In this work, we address an issue of deriving quantitative stability characteristics. Such a characteristic called stability radius is defined as the limit level of perturbations that retains a certain property of a solutions set given in advance. Stability of a multicriteria optimization problem is usually understood as a property of semi-continuity of a multi-valued mapping, which determines the choice function in the Hausdorff sense; i. e., there exists a neighborhood in the space of the initial parameters such that new Pareto optimums are impossible to arise inside it. A weakening of this requirement results in the T_1-stability concept, which is treated as an existence of an initial data neighborhood of in a space of problem parameters such that, although new Pareto optimums may arise within it, for each perturbation, there exists at least one efficient solution to the initial problem (not necessarily the same) that retains Pareto optimality.

We study the T_1-stability radius of Pareto set to parameter perturbations in the vector criterion on an assumption that arbitrary Hölder norms are given in criteria and solutions spaces of the multicriteria Boolean problem. Specifying problems classes for which bounds estimates have obtained guarantees that the estimates are achievable. We also present an easily computable achievable upper-bound estimate, which is equal to a norm of a vector criterion coefficients matrix. These results naturally lead to the known estimates for the T_1-stability radius for the case of Chebyshev norm in the spaces of solutions and criteria.

Keywords: *multicriteria Boolean problem, Pareto set, stability radius, T_1-stability, Hölder norm.*

Введение

Многие проблемы принятия многоцелевых решений (индивидуальных или групповых) в управлении, планировании и проектировании могут быть сформулированы как многокритериальные (векторные) задачи дискретной оптимизации. Характерной особенностью подобных задач, возникающих на практике, является неточность исходной информации. Эта неточность обусловлена влиянием различных факторов неопределенности и случайности: неадекватностью математических моделей реальным процессам, ошибками округления, погрешностями измерений и прочими факторами. В таких условиях математическая задача не может быть корректно поставлена и решена без хотя бы неявного использования результатов теории устойчивости. При этом естественным образом возникают следующие два вопроса: каким условиям должна удовлетворять задача и в каких пределах можно варьировать ее исходные данные, чтобы множество оптимальных решений обладало некоторым наперед заданным свойством инвариантности к возмущениям исходных данных? Они определяют два основных направления исследования проблемы устойчивости задач дискретной оптимизации: качественное и количественное. В рамках качественного направления авторы концентрируют свое внимание на выявлении условий различных типов устойчивости задачи (см. монографию [1], обзор [2] и работы [3, 4, 5, 6, 7, 8]), установлении связи между различными видами устойчивости [9, 10], а также на поиске и описании региона устойчивости оптимального решения [11]. Количественное направление, достаточно подробно изложенное в монографии [12] (см. также недавние обзоры [2, 13]), связано с получением количественных оценок допустимых изменений в исходных данных [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] и разработкой алгоритмов вычисления этих оценок [26, 27, 28].

Настоящая работа лежит в русле направления, связанного с исследованием количественных характеристик устойчивости многокритериальных задач дискретной оптимизации. Одна из таких характеристик, называемая обычно радиусом устойчивости, определяется как предельный уровень возмущений параметров задачи в метрическом пространстве, сохраняющих некоторое наперед заданное свойство множества ее решений. В качестве возмущаемых параметров обычно выступают коэффициенты скалярного или векторного критерия.

Под устойчивостью многокритериальной задачи дискретной оптимизации, состоящей в поиске множества Парето, понимают [1] дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, задающего паретовскую функцию выбора. Тем самым, свойство устойчивости определяет наличие такой окрестности для исходных параметров задачи, внутри которой невозможно появление новых оптимумов Парето. Иными словами, множество Парето внутри этой окрестности может лишь сузиться. Ослабление этого требования приводит к такому типу устойчивости, который трактуется как существование окрестности первоначальных данных задачи, внутри которой хотя и возможно появление новых оптимумов Парето, однако для каждого возмущения должно существовать хотя бы одно Парето-оптимальное решение исходной задачи (не обязательно одно и то же), сохраняющее свою оптимальность. Следуя терминологии [1], будем называть такой тип устойчивости T_1-устойчивостью.

Впервые T_1-устойчивость была исследована в [14] для однокритериальной линейной траекторной задачи. Позднее в [15, 17] получены нижняя и верхняя оценки радиуса этого типа устойчивости для многокритериальной линейной булевой задачи, а также найдена нижняя оценка для многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования. Статья [22] посвящена получению аналогичных оценок для векторной инвестиционной задачи с критериями Вальда. Отметим также работу [4], где установлены необходимые и достаточные условия T_1-устойчивости многокритериальных задач минимизации пороговых булевых функций. Перечисленные выше результаты соответствуют случаю, когда в пространствах параметров задач задана чебышевская норма l_∞.

В данной работе найдены нижняя и верхняя оценки радиуса T_1-устойчивости многокритериальной линейной булевой задачи в предположении, что в критериальном пространстве и пространстве решений заданы произвольные нормы Гельдера. В качестве следствий приведены утверждения, свидетельствующие о достижимости полученных оценок.

1. Постановка задачи и основные определения

Пусть $\mathbf{R}^m$ – критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ — пространство решений, $C = [c_{ij}]$ — матрица размера $m \times n$ со строками $C_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m := \{1, 2, \ldots, m\}$,

$m \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$, $n \geq 2$, $\mathbf{E} = \{0, 1\}$ $|X| \geq 2$. Под m-критериальной линейной булевой задачей

$$Z^m(C): \qquad Cx = \big(C_1x, C_2x, \ldots, C_mx\big)^T \to \min_{x \in X}$$

будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных решений):

$$P^m(C) = \{x \in X:\ X(x, C) = \emptyset\},$$

где

$$X(x, C) = \{x' \in X : x \underset{C}{\succ} x'\},$$

$$x \underset{C}{\succ} x' \ \Leftrightarrow\ Cx \geq Cx' \ \&\ Cx \neq Cx'\}.$$

Таким образом, $X(x, C)$ — множество решений x' задачи $Z^m(C)$, которые доминируют решение x.

В силу конечности X множество Парето $P^m(C)$ непусто при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Возмущение элементов матрицы C будем осуществлять путем прибавления к ней матриц C' из $\mathbf{R}^{m \times n}$. Таким образом, возмущенная задача $Z^m(C + C')$ имеет вид

$$(C + C')x \to \min_{x \in X},$$

а множество эффективных решений такой задачи – вид $P^m(C + C')$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ зададим произвольную норму Гельдера l_p, $p \in [1, \infty]$, т. е. под нормой вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ будем понимать число

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j \in N_n} |a_j|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\max_{j \in N_n} |a_j|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ определим произвольную норму Гельдера l_q, отличную, вообще говоря, от нормы l_p. Под нормой матрицы C будем понимать норму вектора, компонентами которого являются нормы строк матрицы. Тем самым,

$$\|C\|_{pq} = \Big\| \big(\|C_1\|_p, \|C_2\|_p, \ldots, \|C_m\|_p\big) \Big\|_q.$$

В пространстве $\mathbf{R}^n$ наряду с нормой l_p будем использовать сопряженную к ней норму $l_{p'}$, где числа p и p', как известно, связаны равенством

$$1/p + 1/p' = 1.$$

При этом полагаем $p' = 1$, если $p = \infty$, и $p' = \infty$, если $p = 1$. Поэтому далее считаем, что областью изменений чисел p и p' является отрезок $[1, \infty]$, а сами числа связаны указанным выше условием. В этих обозначениях будем считать, что $1/p = 0$ при $p = \infty$.

Не сложно заметить, что для вектора $a \in \mathbf{R}^n$ с условием $|a_j| = \alpha$, $j \in N_n$, при любом числе $p \in [1, \infty]$ справедливо равенство

$$\|a\| = \alpha n^{1/p}. \tag{1}$$

Кроме того, известно, что для любых векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство Гельдера

$$|a^T b| \leq \|a\|_p \|b\|_{p'}. \tag{2}$$

Следуя [1], радиусом T_1-устойчивости (в терминологии [16, 17, 4, 19] — радиусом сильной устойчивости) задачи $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, с нормами Гельдера l_p и l_q в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно назовем число

$$\rho_m(p, q) = \begin{cases} \sup \Xi_{pq}, & \text{если } \Xi_{pq} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi_{pq} = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi_{pq} = \{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (P^m(C) \cap P^m(C + C') \neq \emptyset)\},$$

$$\Omega_{pq}(\varepsilon) = \left\{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_{pq} < \varepsilon\right\} \text{ —}$$

множество возмущающих матриц C' со строками C'_i, $i \in N_m$.

Таким образом, радиус T_1-устойчивости задачи $Z^m(C)$ – это предельный уровень всех таких возмущений элементов матрицы C в метрическом пространстве $\mathbf{R}^{m \times n}$, для каждого из которых в возмущенной задаче $Z^m(C + C')$ сохраняется эффективность хотя бы одного (не обязательно одного и того же) решения исходной задачи $Z^m(C)$.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^m(C) = X$ для каждой матрицы $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ множество $P^m(C) \cap P^m(C + C')$ непусто при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$ и всяком числе $\varepsilon > 0$. Поэтому радиус T_1-устойчивости такой задачи не ограничен сверху. Задачу $Z^m(C)$, для которой $P^m(C) \neq X$, будем называть нетривиальной.

2. Оценки радиуса устойчивости

Для нетривиальной задачи $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, при любых $p, q \in [1, \infty]$ положим

$$\varphi_m(p) = \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P(x, C)} \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_{p'}},$$

$$\psi_m(p,q) = \max_{x' \in P^m(C)} \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \frac{\|[C(x-x')]^+\|_q}{\|x-x'\|_{p'}},$$

$$\chi_m(p,q) = n^{1/p} m^{1/q} \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P^m(C)} \max_{i \in N_m} \frac{C_i(x-x')}{\|x-x'\|_1}.$$

Здесь

$$P(x,C) = X(x,C) \cap P^m(C),$$

$[y]^+ = (y_1^+, y_2^+, \ldots, y_m^+)^T$ – положительная свертка вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T \in \mathbf{R}^m$, т. е. $y_i^+ = \max\{0, y_i\}$, $i \in N_m$.

Теорема. *При любых $p, q \in [1, \infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ для радиуса T_1-устойчивости $\rho_m(p,q)$ нетривиальной задачи $Z^m(C)$ справедливы следующие оценки*

$$0 < \max\{\varphi_m(p), \psi_m(p,q)\} \leq \rho_m(p,q) \leq \min\{\chi_m(p,q), \|C\|_{pq}\}.$$

Доказательство. Поскольку справедлива формула

$$\forall x' \in P^m(C) \;\; \forall x \in X \setminus P^m(C) \;\; \exists i \in N_m \quad (C_i(x-x') > 0),$$

то справедливо неравенство

$$\psi_m(p,q) > 0,$$

свидетельствующее о том, что нижняя оценка радиуса T_1-устойчивости и сам он — положительные величины.

Теперь докажем справедливость неравенства $\rho_m(p,q) \geq \varphi_m(p)$. Будем предполагать, что $\varphi_m(p) > 0$ (в противном случае это неравенство очевидно).

Пусть возмущающая матрица $C' \in \Omega_{pq}(\varphi_m(p))$. Тогда согласно определению числа $\varphi_m(p)$ для любого решения $x \in X \setminus P^m(C)$ существует такое эффективное решение $x^0 \in P(x,C)$, что выполняются неравенства

$$\frac{C_i(x-x')}{\|x-x'\|_{p'}} \geq \varphi_m(p) > \|C'\|_{pq} \geq \|C_i'\|_p, \quad i \in N_m.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера (2), находим

$$(C_i + C_i')(x-x^0) \geq C_i(x-x^0) - \|C_i'\|_p \|x-x^0\|_{p'} > 0, \quad i \in N_m.$$

Это значит

$$x^0 \underset{C+C'}{\not\succ} x,$$

т. е. $x \in X \setminus P^m(C+C')$. Резюмируя, заключаем, что любое неэффективное решение задачи $Z^m(C)$ остается таковым и в любой возмущенной задаче $Z^m(C+C')$, а значит, верны соотношения $\emptyset \neq P^m(C+C') \subseteq P^m(C)$.

Следовательно, $P^m(C) \cap P^m(C + C') \neq \emptyset$ при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\varphi_m(p))$, т. е. $\rho_m(p, q) \geq \varphi_m(p)$.

Далее докажем, что $\rho_m(p, q) \geq \psi_m(p, q)$. Как и в предыдущем случае, выберем произвольную возмущающую матрицу $C' \in \mathbf{R}^{m\times n}$, принадлежащую множеству $\Omega_{pq}(\psi_m(p, q))$, где, как уже было установлено, $\psi_m(p, q)$ — положительное число. Для доказательства неравенства $\rho_m(p, q) \geq \psi_m(p, q)$ достаточно убедиться в существовании решения $x^* \in P^m(C) \cap P^m(C + C')$.

В соответствии с определением величины $\psi_m(p, q)$ существует такое решение $x^0 \in P^m(C)$, что для всякого решения $x \in X \setminus P^m(C)$ имеют место неравенства

$$0 < \psi_m(p, q)\|x - x^0\|_{p'} \leq \|[C(x - x^0)]^+\|_q. \tag{3}$$

Сначала покажем, что

$$\forall x \in X \setminus P^m(C) \ \ \forall C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p, q)) \quad (x \notin X(x^0, C + C')). \tag{4}$$

Если предположить наличие такого решения $\widetilde{x} \in X \setminus P^m(C)$ и такой возмущающей матрицы $\widetilde{C} \in \Omega_{pq}(\psi_m(p, q))$, что $\widetilde{x} \in X(x^0, C + \widetilde{C})$, то для любого индекса $i \in N_m$ выполняется неравенство

$$(C_i + \widetilde{C}_i)\widetilde{x} \leq (C_i + \widetilde{C}_i)x^0,$$

а, стало быть, и неравенство

$$C_i(\widetilde{x} - x^0) \leq \widetilde{C}_i(x^0 - \widetilde{x}).$$

Откуда легко приходим к соотношению

$$[C_i(\widetilde{x} - x^0)]^+ \leq |\widetilde{C}_i(\widetilde{x} - x^0)|,$$

из которого с учетом (2) находим

$$[C_i(\widetilde{x} - x^0)]^+ \leq \|\widetilde{C}_i\|_p\|\widetilde{x} - x^0\|_{p'}.$$

В итоге получаем противоречие неравенству (3)

$$\|[C(\widetilde{x} - x^0)]^+\|_q \leq \|\widetilde{C}\|_{pq}\|\widetilde{x} - x^0\|_{p'} < \psi_m(p, q)\|\widetilde{x} - x^0\|_{p'},$$

свидетельствующее о справедливости формулы (4).

Далее укажем способ выбора необходимого решения $x^* \in P^m(C) \cap P^m(C + C')$, где $C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p, q))$. Если $x^0 \in P^m(C + C')$, то полагаем $x^* = x^0$. Если $x^0 \notin P^m(C + C')$, то в силу внешней устойчивости множества Парето $P^m(C + C')$ (см., например, [29] стр. 39) можно выбрать такое решение $x^* \in P^m(C + C')$, что $x^* \in X(x^0, C + C')$. Принимая во внимание доказанную формулу (4), легко понять, что $x^* \in P^m(C)$. Тем самым доказано неравенство $\rho_m(p, q) \geq \psi_m(p, q)$.

Теперь докажем неравенство $\rho_m(p,q) \le \chi_m(p,q)$. В соответствии с определением величины $\chi_m(p,q)$ найдется такое решение $x^0 \in X \setminus P^m(C)$, что для каждого эффективного решения $x \in P^m(C)$ и любого индекса $i \in N_m$ верно неравенство

$$\chi_m(p,q)\|x^0 - x\|_1 \ge n^{1/p}m^{1/q}C_i(x^0 - x). \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon > \chi_m(p,q)$. Элементы c^0_{ij} возмущающей матрицы $C^0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ зададим по правилу

$$c^0_{ij} = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 1, \\ \delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 0, \end{cases}$$

где

$$\chi_m(p,q) < \delta n^{1/p}m^{1/q} < \varepsilon. \tag{6}$$

Отсюда, согласно (1), находим

$$\|C^0_i\|_p = \delta n^{1/p}, \quad i \in N_m,$$

$$\|C^0\|_{pq} = \delta n^{1/p}m^{1/q}, \quad C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon),$$

$$C^0_i(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0, \quad i \in N_m. \tag{7}$$

Поэтому, используя (5) и (6), заключаем, что для каждого решения $x \in P^m(C)$ и всякого индекса $i \in N_m$ имеют место соотношения

$$(C_i + C^0_i)(x^0 - x) \le \Big(\chi_m(p,q)\big(n^{1/p}m^{1/q}\big)^{-1} - \delta\Big)\,\|x^0 - x\|_1 < 0.$$

Таким образом, $x \notin P^m(C + C^0)$ при $x \in P^m(C)$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > \chi_m(p,q)$ существует такая возмущающая матрица $C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$, что $P^m(C) \cap P^m(C + C^0) = \emptyset$, т. е. $\rho_m(p,q) < \varepsilon$ для всякого числа $\varepsilon > \chi_m(p,q)$. Следовательно, $\rho_m(p,q) \le \chi_m(p,q)$.

Наконец, убедимся в справедливости неравенства $\rho_m(p,q) \le \|C\|_{pq}$. Пусть $x^0 \in X \setminus P^m(C)$ и $\varepsilon > \|C\|_{pq}$. Зафиксируем число δ с условием

$$0 < \delta n^{1/p} < \varepsilon - \|C\|_{pq}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение вектор-строку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с компонентами

$$\xi_j = \begin{cases} -\delta, & \text{если } x^0_j = 1, \\ \delta, & \text{если } x^0_j = 0. \end{cases}$$

Тогда, согласно (1), получаем

$$\|\xi\|_p = \delta n^{1/p}.$$

Кроме того, для любого решения задачи $Z^m(C)$ и, в частности, для $x \in P^m(C)$ верно соотношение

$$\xi(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0. \tag{9}$$

Строки $C_i^0 \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m$, возмущающей матрицы $C^0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ зададим по правилу

$$C_i^0 = \begin{cases} \xi - C_1, & \text{если } i = 1, \\ -C_i, & \text{если } i \neq 1. \end{cases}$$

В результате, учитывая (9), для любого решения $x \in P^m(C)$ имеем

$$C_1^0(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 - C_1(x^0 - x)$$

и благодаря (8) выводим

$$\|C^0\|_{pq} \leq \|\xi\|_p + \|C\|_{pq} = \delta n^{1/p} + \|C\|_{pq} < \varepsilon.$$

Отсюда для каждого решения $x \in P^m(C)$ получаем

$$(C_1 + C_1^0)(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0,$$

$$(C_i + C_i^0)(x^0 - x) = 0, \quad i \in N_m \setminus \{1\}.$$

Это означает, что $x^0 \in X(x, C + C^0)$. Тем самым, если $x \in P^m(C)$, то $x \notin P^m(C + C^0)$, что свидетельствует о пустоте множества $P^m(C) \cap P^m(C + C^0)$. Итак, $\rho_m(p, q) < \varepsilon$ для всякого числа $\varepsilon > \|C\|_{pq}$. Следовательно, $\rho_m(p, q) \leq \|C\|_{pq}$. □

3. Следствия

Из теоремы вытекают следующие два известных результата, полученные соответственно в [17] и [14] (см. также [1]).

Следствие 1. *Если $p = q = \infty$, то при любом $m \in \mathbf{N}$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(C)$ справедливы оценки*

$$\max_{x' \in P^m(C)} \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1} \leq \rho_m(\infty, \infty) \leq \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P^m(C)} \max_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Следствие 2. *Если $p = \infty$, то при любом $q \in [1, \infty]$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной однокритериальной задачи $Z^1(C)$ верны равенства*

$$\rho_1(\infty, q) = \varphi_1(\infty) = \chi_1(\infty, q) = \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P^m(C)} \frac{C_1(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Отметим, что следствие 2 доказывает достижимость оценок $\varphi_m(p)$ и $\chi_m(p, q)$ при $p = \infty$ и $m = 1$. Далее предъявим еще несколько классов задач $Z^m(C)$, для которых оценки, указанные теоремой, достижимы.

Радиусом устойчивости эффективного решения $x^0 \in P^m(C)$ задачи $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, с нормами Гельдера l_p и l_q в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ назовем число

$$\rho_m(x^0,p,q) = \begin{cases} \sup \Xi_{pq}, & \text{если } \Theta_{pq} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Theta_{pq} = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Theta_{pq} = \left\{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad \left(x^0 \in P^m(C+C')\right)\right\}.$$

В работе [20] показано, что при любых $p,q \in [1,\infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ для радиуса устойчивости эффективного решения $x^0 \in P^m(C)$ задачи $Z^m(C)$ справедлива формула

$$\rho_m(x^0,p,q) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|[C(x-x')]^+\|_q}{\|x-x'\|_{p'}}. \tag{10}$$

Очевидно, что $\rho_m(p,q) = \rho_m(x^0,p,q)$, если $P^m(C) = \{x^0\}$. Поэтому на основании формулы (10) из теоремы вытекают два утверждения, свидетельствующих о достижимости нижних оценок.

Следствие 3. *Если $P^1(C) = \{x^0\}$, то при любых $p,q \in [1,\infty]$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной однокритериальной задачи $Z^1(C)$ справедлива формула*

$$\rho_1(p,q) = \varphi_1(p).$$

Следствие 4. *Если $P^m(C) = \{x^0\}$, то при любых $p,q \in [1,\infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(C)$ справедлива формула*

$$\rho_m(p,q) = \psi_m(p,q).$$

Следствие 5. *При любых $p,q \in [1,\infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ существует такой класс нетривиальных задач $Z^m()$, что для радиуса устойчивости любой задачи из этого класса справедлива формула*

$$\rho_m(p,q) = \|C\|_{pq}.$$

Доказательство. Данный класс задач можно построить, например, следующим образом. Пусть $X = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\} \subset \mathbf{E}^n$, где решение x^0 – это нулевой вектор, а каждое решение x^j, $j \in N_n$, — единичный вектор. И пусть $C^* = [c^*_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ такая матрица с отрицательными элементами, что

$$P^m(C^*) = X \setminus \{x^0\}.$$

Тогда для того чтобы решение x^0 стало эффективным в возмущенной задаче $Z^m(C^* + C')$, $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, для каждого $x \in X \setminus \{x^0\}$ необходимо выполнение отношения

$$x^0 \underset{C^*+C'}{\not\succ} x.$$

Поэтому $C'x \geq -C^*x$. Отсюда получаем

$$c'_{ij} \geq -c^*_{ij}, \quad i \in N_m, \ j \in N_n.$$

Таким образом, верно неравенство $\rho_m(p,q) \geq \|C^*\|_{pq}$, которое с учетом теоремы убеждает нас в справедливости равенства $\rho_m(p,q) = \|C^*\|_{pq}$. □

4. Сравнение оценок

Покажем, что каждая из нижних (верхних) оценок, может быть лучше другой.

Прежде всего очевидно, что есть случаи, когда

$$\varphi_m(p) < \psi_m(p,q), \tag{11}$$

поскольку $\psi_m(p,q) > 0$, а число $\varphi_m(p)$ может быть и нулем.

Кроме того, так как при $q \neq \infty$, $m \geq 2$ и $P^m(C) = \{x^0\}$ для всякого решения $x \neq x^0$ верно неравенство

$$\|[C(x-x^0)]^+\|_q > \min_{i\in N_m} C_i(x-x^0),$$

то (11) имеет место и при одновременном выполнении условий $P^m(C) = \{x^0\}$, $m \geq 2$, $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty)$.

Также нетрудно понять, что при $p \in [1,\infty)$ для класса задач $Z^m(C)$, описанного в доказательстве следствия 5, справедливо неравенство

$$\chi_m(p,q) > \|C\|_{pq}. \tag{12}$$

Конечно, возможны и противоположные неравенства. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример. Пусть $m=2$, $n=8$, $p=q=\infty$, $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, $x^1 = (0,1,1,1,0,0,0,0)^T$, $x^2 = (0,0,0,0,1,1,1,0)^T$, $x^3 = (0,0,0,0,0,1,1,1)^T$, $x^4 = (1,1,1,0,0,0,0,0)^T$,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Cx^1 = Cx^3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, Cx^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, Cx^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$
$$P^2(C) = \{x^2, x^4\},$$
$$X \setminus P^2(C) = \{x^1, x^3\}.$$

В результате получаем $\varphi_2(\infty) = 1$, $\psi_2(\infty, \infty) = 1/2$, $\chi_2(\infty, \infty) = 3/2$, $\|C\|_{\infty\infty} = 7$. Тем самым верны неравенства противоположные к (11) и (12).

Далее покажем, что радиус T_1-устойчивости такой задачи равен 5/4.

Рассмотрим возмущающую матрицу C^* вида

$$C^* = C^*(\delta) = \begin{bmatrix} 5/4+\delta & 0 & 0 & -5/4-\delta & 5/4+\delta & 0 & -1/2-\delta & -5/4-\delta \\ 5/4+\delta & -1/2-\delta & 0 & -5/4-\delta & 5/4+\delta & 0 & 0 & -5/4-\delta \end{bmatrix},$$

где δ — произвольное положительное число. Тогда очевидны равенства

$$\|C^*\|_{\infty\infty} = 5/4 + \delta,$$
$$(C + C^*)x^1 = \begin{bmatrix} 15/4-\delta \\ 21/4-\delta \end{bmatrix}, \quad (C + C^*)x^2 = \begin{bmatrix} 15/4+\delta \\ 21/4+\delta \end{bmatrix},$$
$$(C + C^*)x^3 = \begin{bmatrix} 13/4-\delta \\ 23/4-\delta \end{bmatrix}, \quad (C + C^*)x^4 = \begin{bmatrix} 13/4+\delta \\ 23/4+\delta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$ имеем

$$P^2(C + C^*) = \{x^1, x^3\},$$
$$X \setminus P^2(C + C^*) = \{x^2, x^4\}.$$

Поэтому для всякого числа $\varepsilon > 5/4$ существует такая возмущающая матрица $C^* \in \Omega_{\infty\infty}(\varepsilon)$, что $P^2(C) \cap P^2(C + C^*) = \emptyset$. Следовательно,

$$\rho_2(\infty, \infty) \le 5/4. \tag{13}$$

С другой стороны, чтобы оба решения x^2 и x^4 перестали быть эффективными в возмущенной задаче $Z^2(C + C')$, $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{2\times 8}$ решения x^1 и x^3 должны их доминировать. Нетрудно убедиться, что $x^4 \underset{C+C'}{\succ} x^1$ только при $\|C'\|_{\infty\infty} \ge 3/2$. Такое же утверждение верно и для пары решений x^2 и x^3. Это означает, что при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{\infty\infty}(3/2)$ верны соотношения

$$x^4 \underset{C+C'}{\not\succ} x^1 \quad \text{и} \quad x^2 \underset{C+C'}{\not\succ} x^3.$$

Таким образом, при $C' \in \Omega_{\infty\infty}(3/2)$ только решение x^1 может доминировать x^2 и только решение x^3 может доминировать x^4. Для этого необходимо одновременное выполнение неравенств:

$$C'_1(x^1 - x^2) \le -2 = C_1(x^2 - x^1),$$
$$C'_1(x^3 - x^4) \le -3 = C_1(x^4 - x^3),$$
$$C'_2(x^1 - x^2) \le -3 = C_2(x^2 - x^1),$$
$$C'_2(x^3 - x^4) \le -2 = C_2(x^4 - x^3).$$

Откуда выводим

$$-c'_{i1} + c'_{i4} - c'_{i5} + c'_{i8} \le -5, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Поэтому $\|C'\|_{\infty\infty} \ge 5/4$ и, следовательно, $\rho_2(\infty, \infty) \ge 5/4$, что вместе с (13) убеждает нас в справедливости равенства $\rho_2(\infty, \infty) = 5/4$.

Итак, в рассмотренном примере верна цепочка неравенств

$$\psi_2(\infty, \infty) < \varphi_2(\infty) < \rho_2(\infty, \infty) < \chi_2(\infty, \infty) < \|C\|_{\infty\infty}.$$

Заключение

Поскольку исходные данные реальных задач оптимизации, как правило, задаются с некоторой степенью неопределенности (точности), возникает потребность в исследовании устойчивости искомых решений к возмущениям параметров задачи.

В работе исследована количественная характеристика T_1-устойчивости множества Парето многокритериальной линейной булевой задачи в предположении, что в пространствах решений и критериев заданы различные нормы Гельдера. Получены следующие результаты: 1) найдены две нижние и две верхние оценки радиуса T_1-устойчивости; 2) доказана достижимость этих оценок; 3) выявлены случаи, когда каждая оценка из пары нижних (верхних) оценок лучше другой; 4) приведен иллюстрационный числовой пример.

Список литературы

1. Сергиенко, И. В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. — Киев: Наукова думка, 2003. — 261 с.

   SERGIENKO, I. and SHILO, I. (2003) *Discrete Optimization Problems. Problems, methods, research.* Kiev: Naukova dumka.

2. Емеличев, В. А. Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией / В. А. Емеличев, В. М. Котов, К. Г. Кузьмин и др. // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 1. — С. 53–67.

EMELICHEV, V., KOTOV, V., KUZMIN, K., LEBEDEVA, T., SEMENOVA, N., and SERGIENKO, T. (2004) Stability in the combinatorial vector optimization problems. *Journal Automation and Information Sciences.* 26 (2). p. 27–41.

3. Емеличев, В. А. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин, А. М. Леонович. — 2004. — № 2. — С. 79–92.

   EMELICHEV, V., KUZMIN, K. and LEONOVICH, A. (2004) Stability in the combinatorial vector optimization problems. *Automation and Remote Control.* 62 (2). p. 227–240.

4. Емеличев, В. А. О сильной устойчивости решений векторной задачи минимизации пороговых булевых функций // Информатика. — 2005. — № 1. — С. 16–27.

   EMELICHEV, V. & KUZMIN, K. (2008) On the strong stability of a vector problem of threshold Boolean functions minimization. *Informatics.* (1). p. 16–27.

5. Емеличев, В. А. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.

   EMELICHEV, V. and KUZMIN, K. (2008) Stability criteria in vector combinatorial bottleneck problems in terms of binary relations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 44 (3). p. 397–404.

6. EMELICHEV, V., GUREVSKY, E. and KUZMIN, K. (2010) On stability of some lexicographic integer problem. *Control and Cybernetics.* 39 (3). p. 811–826.

7. EMELICHEV, V., KARELKINA, O. and KUZMIN, K. (2012) Qualitative stability analysis of multicriteria combinatorial minimin problems. *Control and Cybernetics.* 41 (1). p. 57–79.

8. GUREVSKY, E, BATTAIA, O. and DOLGUI, A (2012) Balancing of simple assembly lines under variations of task processing times. *Annals of Operation Research.* 201. p. 265–286.

9. Лебедева, Т. Т. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множества оптимальных и неоптимальных решений / Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.

   LEBEDEVA, T., SEMENOVA, N. and SERGIENKO, T. (2005) Stability of vector problems of integer optimization: relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 41 (4). p. 551–558.

10. Лебедева, Т. Т. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход / Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 142–148.

    LEBEDEVA, T. and SERGIENKO, T. (2008) Different types of stability of vector integer optimization problem: general approach. *Cybernetics and Systems Analysis.* 44 (3). p. 429–433.

11. LIBURA, M., VAN DER POORT, E., SIERKSMA, G. and VAN DER VEEN, J. (1998) Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions. *Discrete Applied Mathematics.* 87 (1-3). p. 159–185.

12. SOTSKOV, YU., SOTSKOVA, N., LAI, T.-C. and WERNER, F. (2010) *Scheduling under uncertainty: theory and algorithms.* Minsk: Belorusskaya nauka.

13. Гордеев, Э. Н. Сравнение трех подходов к исследованию устойчивости решений задач дискретной оптимизации и вычислительной геометрии / Э. Н. Гордеев // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22. — № 3. — С. 18–35.

    GORDEEV, E. (2015) Comparison of three approaches to studying stability of solutions to problems of discrete optimization and computational geometry. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 9 (3). p. 358–366.

14. Леонтьев, В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах / В. К. Леонтьев // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1979. — Вып. 35. — С. 169–184.

    LEONTIEV, V. (1979) Stability in linear discrete problems. *Problems of Cybernetics.* 35. p. 169–184.

15. EMELICHEV, V. and NIKULIN, Yu. (1999) Numerical measure of strong stability and strong quasistability in the vector problem of integer linear programming. *Computer Science Journal of Moldova.* 7 (1). p. 105–117.

16. Емеличев, В. А. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования / В. А. Емеличев, Д. П. Подкопаев // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — 2001. — Т. 8. — № 1. — С. 47–69.

    EMELICHEV, V. and PODKOPAEV, D. (2001) Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii. Ser. 2.* 8 (1). p. 47–69.

17. EMELICHEV, V., GIRLICH, E., NIKULIN, YU. and PODKOPAEV, D. (2002) Stability and regularization of vector problem of integer linear programming. *Optimization.* 51 (4). p. 645–676.

18. EMELICHEV, V., NIKULIN, Yu. and KUZMIN, K. (2005) Stability analysis of the Pareto optimal solution for some vector Boolean optimization problem. *Optimization.* 54 (6). p. 545–561.

19. Емеличев, В. А. Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 5. — С. 45–51.

    EMELICHEV, V. and KUZMIN, K. (2007) On a type of stability of a multicriteria integer linear programming problem in the case of a monotone norm. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 46 (5). p. 714–720.

20. Емеличев, В. А. Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19. — Вып 3. — С. 79–83.

    EMELICHEV, V. and KUZMIN, K. (2007) A general approach to studying the stability of a Pareto optimal solution of a vector integer linear programming problem. *Discrete Mathematics and Applications.* 17 (4). p. 349–354.

21. EMELICHEV, V. and PODKOPAEV, D. (2010) Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming. *Discrete Optimization.* 7 (1–2). p. 48–63.

22. Емеличев, В. А. Об одном типе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями Вальда / В. А. Емеличев, В. В. Коротков // Труды института математики НАН Беларуси. — 2012. — Т. 20. — № 2. — С. 10–17.

    EMELICHEV, V. and KOROTKOV, V. (2012) Stability of lexicographical investment problem with Wald's maximin criteria. *Proceedings of the Institute of Mathematics.* 20 (2). p. 10–17.

23. Бухтояров, С. Е. Об устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями крайнего оптимизма / С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — Т. 25. — № 2. — С. 7–13.

    BUKHTOYAROV, S. and EMELICHEV, V. (2014) On stability of vector investment problem with extreme optimism criteria. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* 25 (2). p. 7–13.

24. Бухтояров, С. Е. О мере устойчивости решений векторного варианта одной инвестиционной задачи / С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22. — № 2. — С. 5–16.

    BUKHTOYAROV, S. and EMELICHEV, V. (2015) On the stability measure of solutions to a vector version of an investment problem. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 9 (3). p. 328–334.

25. Кузьмин, К. Г. Единый подход к получению количественных характеристик устойчивости задачи о максимальном разрезе графа / К. Г. Кузьмин // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22. — № 5. — С. 30–51.

    KUZMIN, K. (2015) A general approach to the calculation of stability radii for the max-cut problem with multiple criteria. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 9 (4). p. 527–539.

26. CHAKRAVARTI, N. and WAGELMANS, A. (1998) Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems. *Operations Research Letters.* 23 (1). p. 1–7.

27. VAN HOESEL, S. and WAGELMANS, A. (1999) On the complexity of postoptimality analysis of 0-1 programs. *Discrete Applied Mathematics.* 91. p. 251–263.

28. ROLAND, J., DE SMET, Y. and RUI FIGUEIRA, J. (2012) On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization. *4OR.* 10 (4). p. 379–389.

29. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 256 с.

    PODINOVSKII, V. and NOGHIN, V. (2007) *Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems.* Moscow: FIZMATLIT.