УДК: 517.983

MSC2010: 47A06, 47A10

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ МЕРАМИ

© В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.

Политехническая, 77, Саратов, 410054, Российская Федерация

e-mail: *vladislavbruk@mail.ru*

On Boundary Value Problems for Integral Equations with Operator Measures.

Bruk V. M.

Abstract. On a segment $[a,b]$, we consider integral equations

$$y_k(t) = y_k(a) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{p}_k) y_k(s) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{m}_k) f_k(s) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

where $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ are operator-valued measures defined on Borel sets $\Delta \subset [a,b]$ and taking values in a set of linear bounded operators acting in a separable Hilbert space H; $f_k \in L_1(H, \mathbf{m}_k; a, b)$; y_k are unknown functions. The measures $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ are assumed to have bounded variations on $[a,b]$. For these equations we consider boundary conditions

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0, 1, 2 \dots ,$$

where $\Gamma_k : \widetilde{C} \to B$ are linear continuous mappings; $c_k \in B$; $\widetilde{C}$ is a space of functions continuous from the left on $[a,b]$ and taking values in H; B is a Banach space; $k = 0, 1, 2, \dots$.

Let $\mathscr{K}_0$ be a set of solutions of integral equation for $k = 0$, $f_0 = 0$, and $\widetilde{\Gamma}_0$ the restriction of Γ_0 to $\mathscr{K}_0$, and $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p})$ a variation of a measure $\mathbf{p}$. The aim of this paper is to prove following statement.

Theorem. *Suppose the operator $\widetilde{\Gamma}_0$ is a one-to-one mapping of $\mathscr{K}_0$ onto B and $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) \to 0$, $f_n \to f_0$ uniformly on $[a,b]$, $c_n \to c$ in B as $n \to \infty$. Then the problem stated above has a unique solution y_n for large enough n and $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ as $n \to \infty$ uniformly with respect to t.*

We use the following statement to prove the theorem formulated above.

Theorem. *Suppose a measure $\mathbf{p}$ has a bounded variation on $[a,b]$. Then there exists a unique solution of the equation*

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{p}(s) y(s) + g(t)$$

on the interval $[t_0 - \delta, b]$, where $g \in \widetilde{C}$, $\delta = \delta(t_0)$ is small enough and $\delta = 0$ if $t_0 = a$.

Keywords: *integral equation, operator measure, boundary value problem, Hilbert space, linear operator.*

Введение

В данной работе на отрезке $[a,b]$ рассматриваются интегральные уравнения

$$y_0(t) = y_0(a) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{p}_0) y_0(s) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{m}_0) f_0(s) ds, \tag{1}$$

$$y_n(t) = y_n(a) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{p}_n) y_n(s) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{m}_n) f_n(s) ds, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H; y_k — неизвестные функции, $f_k \in L_1(H, \mathbf{m}_k; a, b)$. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ имеют ограниченные вариации на $[a,b]$. Эти меры продолжены на отрезок $[a, b_0]$, $b_0 > b$ с помощью равенства: $\mathbf{p}_k(\Delta) = \mathbf{m}_k(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset (b, b_0]$.

Для уравнений (1), (2) рассматриваются следующие граничные условия

$$\Gamma_0 y_0 = c_0, \tag{3}$$

$$\Gamma_n y_n = c_n, \quad n = 1, 2 \ldots\,, \tag{4}$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C}[a, b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; $k = 0, 1, 2, \ldots$; B – банахово пространство; $\widetilde{C}[a, b_0]$ — пространство измеримых по Борелю функций со значениями в H, непрерывных слева на $(a, b_0]$ и ограниченных на $[a, b_0]$.

Введем обозначения: $\mathscr{K}_0$ — множество решений уравнения (1) при $f_0 = 0$, $\widetilde{\Gamma}_0$ — сужение Γ_0 на $\mathscr{K}_0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p})$ — вариация меры $\mathbf{p}$ на $[a,b]$. Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}_0$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}_0$ на B и пусть $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) \to 0$, $f_n \to f_0$ равномерно на $[a,b]$, $c_n \to c$ в B при $n \to \infty$. Тогда при достаточно больших n задача* (2), (4) *имеет единственное решение y_n и $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ равномерно по t.*

В случае, когда $\mathbf{m}_k$ — «обычные» меры Лебега (т. е. $\mathbf{m}_k([\alpha,\beta)) = (\beta - \alpha)E$, где $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, E — тождественный оператор), задачи (1) — (4) при более жестких ограничениях на решения уравнений (1), (2), рассматривались в [1]. В этой работе, кроме ослабления требований на решения (1), (2), изменены доказательства, а также исправлены погрешности, допущенные [1].

Пусть $\mathbf{m}_k$ — «обычные» меры Лебега и операторные меры $\mathbf{p}_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ абсолютно непрерывны, т. е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ $(t \in [a,b])$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, что $\|p_k\| \in L_1(a,b)$

и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$. Тогда уравнения (1), (2) переходят в дифференциальные уравнения $y_k'(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась во многих работах. Наиболее общие результаты получены в статье [2], где приведена подробная библиография.

1. Решение интегральных уравнений

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \to \mathbf{p}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [3, гл. 5, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{p}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{p}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{p}$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$, продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0] \supset [a,b_0) \supset [a,b]$, полагая $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset [a,b_0] \backslash [a,b]$.

Обозначим $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_i \|\mathbf{p}(\Delta_i)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_i \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ. Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi \in [a,b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$ справедливо

$$\mathbf{p}(\Delta) = \int\limits_\Delta \Psi(\xi)d\rho. \tag{5}$$

Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры. Интеграл (5) сходится в смысле обычной нормы операторов ([3, гл. 5, с. 325]). Очевидно, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}_{[a,b_0]}(\mathbf{p}) = \rho([a,b])$.

Функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$, если существует интеграл (в смысле Бохнера)

$$\int\limits_\Delta \Psi(t)h(t)d\rho = \int\limits_\Delta (d\mathbf{p})h(t). \tag{6}$$

Из (6) следует, что если измеримая по Борелю функция h ограничена, то

$$\left\| \int\limits_\Delta (d\mathbf{p})h(t) \right\| \leqslant \sup_{t\in\Delta} \|h(t)\|\, \rho(\Delta). \tag{7}$$

Символом $\int_{t_0}^{t}$ обозначим $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на $[a, b_0]$. Тогда функция $y(t) = \int_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле (здесь $t_0, t \in [a, b_0]$).

Пусть $[l_1, l_2] \subset [a, b_0]$. Рассмотрим множество измеримых по Борелю функций со значениями в H, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева на $(l_1, l_2]$ и постоянных, если $b < t \leqslant b_0$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{p}(s)y(s) + g(t), \quad a \leqslant t_0 \leqslant b_0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a, b]$*. Тогда для любой функции* $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ *существует единственное решение уравнения* (8)*, принадлежащее пространству* $\widetilde{C}[t_0 - \delta, b_0]$*, где* $\delta = \delta(t_0) > 0$ *достаточно мало и* $\delta = 0$ *при* $t_0 = a$.

Доказательство. Сначала докажем существование такого отрезка $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, что уравнение (8) имеет единственное решение в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0}) = \widetilde{C}[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ($\delta > 0$). (Если $t_0 = a$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0, t_0 + \delta]$, а если $t_0 = b_0$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0]$.)

Пусть $t \to \widehat{\rho}(t)$ — какая-либо непрерывная слева функция, порождающая меру ρ. Через $\widehat{\rho}_{t_0}$ обозначим скачок функции $\widehat{\rho}$ в точке t_0 (возможно, что $\widehat{\rho}_{t_0} = 0$). Положим $\widehat{r}_{t_0}(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$ и $\widehat{r}_{t_0}(t) = \widehat{\rho}_{t_0}$ при $t > t_0$. Обозначим $\widehat{r}(t, t_0) = \widehat{\rho}(t) - \widehat{r}_{t_0}(t)$. Функция $t \to \widehat{r}(t, t_0)$ непрерывна в точке t_0. Определим операторные меры равенствами

$$\mathbf{r}(\Delta, t_0) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi)d\widehat{r}(\xi, t_0), \quad \mathbf{r}_{t_0}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi)d\widehat{r}_{t_0}(\xi).$$

Тогда $\mathbf{p}(\Delta) = \mathbf{r}(\Delta, t_0) + \mathbf{r}_{t_0}(\Delta)$.

В этих обозначениях уравнение (8) примет вид $y = Ay + z$, где

$$(Ay)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{r}(s, t_0)y(s) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\xi)y(\xi)d\widehat{r}(\xi, t_0), \tag{9}$$

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{r}_{t_0}(s)y(s) + g(t) = \widetilde{\mathbf{r}}_{t_0}(t)x_0 + g(t), \quad x_0 = g(t_0), \tag{10}$$

$\widetilde{\mathbf{r}}_{t_0}(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_{t_0}(t) = \mathbf{r}_{t_0}(\{t_0\}) = \mathbf{p}(\{t_0\})$ при $t > t_0$.

Учитывая (7), (9), непрерывность функции $\widehat{r}(\cdot,t_0)$ в точке t_0, получим

$$\|(Ay)(t)\| \leqslant \sup_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|\,|\widehat{r}(t,t_0)-\widehat{r}(t_0,t_0)| < \varepsilon \sup_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|\,. \tag{11}$$

Таким образом, $\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|(Ay)(t)\| \leqslant \varepsilon \sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|$. Выберем такое $\delta>0$, при котором $\varepsilon<1$. Тогда $\|A\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})}<1$. Поэтому оператор $E-A$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})$. Функция z тогда и только тогда равна нулю при всех t, когда $g=0$ на $\mathscr{I}_{\delta,t_0}$ (и, следовательно, $x_0=0$). Поэтому существует единственное решение уравнения (8) на отрезке $\mathscr{I}_{\delta,t_0}$. Это решение находится по формуле

$$y=(E-A)^{-1}z. \tag{12}$$

Докажем существование решения на всем интервале $[t_0-\delta,b_0]$. Можно считать, что $t_0<b_0$. Достаточно установить, что решение u, определенное на интервале $[t_0-\delta,d)$, можно продолжить за пределы этого интервала, если $d\neq b_0$.

Сохраняем обозначения из приведенного выше доказательства, заменив t_0 на t'_0. Положим $t'_0=d$. Фиксируем $\varepsilon<1/4$ и выберем δ так, чтобы $t'_0+\delta\leqslant b_0$ и $|\widehat{r}(t,t'_0)-\widehat{r}(t'_0,t'_0)|<\varepsilon$ при всех $t\in\mathscr{I}_{\delta,t'_0}$. Фиксируем точку $t_1=t'_0-\delta/8$. Тогда для всех t со свойством $|t-t_1|\leqslant\delta/2$ выполняется неравенство

$$|\widehat{r}(t,t'_0)-\widehat{r}(t_1,t'_0)|\leqslant|\widehat{r}(t,t'_0)-\widehat{r}(t'_0,t'_0)|+|\widehat{r}(t'_0,t'_0)-\widehat{r}(t_1,t'_0)|<2\varepsilon<1/2. \tag{13}$$

Рассмотрим оператор

$$(By)(t)=\int_{t_1}^{t} d\mathbf{r}(s,t'_0)y(s)=\int_{t_1}^{t}\Psi(\xi)y(\xi)d\widehat{r}(\xi,t'_0).$$

Из (13) следует, что $\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}}\|(By)(t)\|\leqslant(1/2)\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}}\|y(t)\|$. Поэтому оператор $E-B$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta/2,t_1})$.

Пусть $v=(E-B)^{-1}z_1$, $w=(E-B)^{-1}z_2$, где $z_1(t)=u(t_1)-g(t_1)+g(t)$, $z_2(t)=z_1(t)+h(t)$, $h(t)=\widetilde{\mathbf{r}}_{t'_0}(t)v(t'_0)$ и, как и выше, $\widetilde{\mathbf{r}}_{t'_0}(t)=0$ при $t\leqslant t'_0$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_{t'_0}(t)=\mathbf{p}(\{t'_0\})$ при $t>t'_0$. Тогда на отрезке $[t_1-\delta/2,t_1+\delta/2]$

$$v(t)=\int_{t_1}^{t}\Psi(\xi)v(\xi)d\widehat{r}(\xi,t'_0)+u(t_1)-g(t_1)+g(t), \tag{14}$$

$$w(t)=\int_{t_1}^{t}\Psi(\xi)w(\xi)d\widehat{r}(\xi,t'_0)+u(t_1)-g(t_1)+h(t)+g(t). \tag{15}$$

При $t \in [t_1 - \delta/2, t_0']$ имеем из (15)

$$w(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi) w(\xi) d\widehat{r}(\xi, t_0') + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \tag{16}$$

Из (13) следует, что уравнение

$$y(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi) y(\xi) d\widehat{r}(\xi, t_0') + \widetilde{g}(t), \quad \widetilde{g} \in \widetilde{C}[a, b_0], \tag{17}$$

где y — неизвестная функция, имеет единственное решение на интервале $(t_1 - \delta/8, t_0')$. Тогда из (14), (16) получаем, что на интервале $(t_1 - \delta/8, t_0')$ функции v, w совпадают. Следовательно, $w(t_0') = v(t_0')$. Кроме того, равенство $\widehat{\rho}(t) = \widehat{r}(t, t_0') + \widehat{r}_{t_0'}(t)$ и (15) при $t \in \mathscr{I}_{\delta/2, t_1}$ (т. е. при $t_1 - \delta/2 \leqslant t \leqslant t_1 + \delta/2 = t_0' + (3/8)\delta$) влекут

$$w(t) = \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{p}) w(s) + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \tag{18}$$

С другой стороны, функция u является решением уравнения (8) на $[t_0 - \delta, t_0')$. Поэтому

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}) u(s) + g(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{p}) u(s) + g(t). \tag{19}$$

Учитывая, что $\widehat{r}(t, t_0') = \widehat{\rho}(t)$, если $t \leqslant t_0'$, получим из (19)

$$u(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi) u(\xi) d\widehat{r}(\xi, t_0') + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \tag{20}$$

Из единственности решения уравнения (17) и из (14), (16), (20) получаем, что на интервале $(t_1 - \delta/8, t_0')$ функции u, v, w совпадают. Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{t \to t_0' - 0} u(t) = w(t_0') = v(t_0')$.

Обозначим через $\widetilde{u}$ функцию, равную u на $[t_0' - \delta, t_0')$ и w на $[t_0', t_0' + (3/8)\delta]$. Функция $\widetilde{u}$ является решением уравнения (8). Действительно, при $t < t_0'$ это утверждение следует из того, что u является решением (8). Пусть $t_1 \leqslant t \leqslant t_0' + (3/8)\delta$. Из (18), (19) получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}) \widetilde{u}(s) + g(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (d\mathbf{p}) u(s) + \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{p}) w(s) + g(t) =$$
$$= (u(t_1) - g(t_1)) + w(t) - u(t_1) + g(t_1) = \widetilde{u}(t).$$

Итак, $\widetilde{u}$ — решение (8) и $\widetilde{u}$ есть продолжение u на интервал $[t_0', t_0' + (3/8)\delta]$.

Докажем единственность решения уравнения (8). Пусть существуют два решения u_1, u_2, тогда $u_1(t) = u_2(t)$ при $t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}$. Обозначим через T верхнюю грань множества таких t, что $u_1(t) = u_2(t)$ при всех $t < T$. Тогда $u_1(T) = u_2(T)$ в силу непрерывности слева функций u_1, u_2. При $t > T$ имеем

$$u_i(t) = x_1 - g(T) + \int\limits_T^t (d\mathbf{p})u_i(s) + g(t), \quad x_1 = u_1(T) = u_2(T), \ \ i = 1, 2. \tag{21}$$

По доказанному выше, решение уравнения (21) в некоторой окрестности точки T единственно. Поэтому $T = b_0$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{p}$ *— мера с ограниченной вариацией. Тогда при* $t_0 = a$ *уравнение* (8) *имеет единственное решение для любой функции* $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$.

Замечание 1. В доказательстве теоремы 1 выберем δ так, чтобы в неравенстве (11) $\varepsilon \leqslant 1/2$. Тогда $\|(E - A)^{-1}\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})} \leqslant 2$. Из (10), (12) следует

$$\|y\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})} \leqslant 2(1 + \mathbf{V}_{\mathscr{I}_{\delta,t_0}}(\mathbf{p}))\, \|g\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})}\,.$$

Замечание 2. При $t < t_0$ решение уравнения (8) может быть не единственным и, кроме того, может не продолжаться влево.

Пример. Пусть $H = \mathbb{C}$. Рассмотрим на отрезке $[0, 2]$ меру $\mathbf{p}$, заданную производящей функцией $\widehat{p}(t)$, равной нулю при $t \leqslant 1$ и -1 при $t > 1$. Тогда решением уравнения $y = \int_2^t y d\mathbf{p}$, кроме функции, тождественно равной нулю, является функция $\omega(t)$, равная 1, если $t \leqslant 1$, и 0, если $t > 1$. Далее, функция $y = 1$ является решением уравнения $y = 1 + \int_2^t y d\mathbf{p}$ при $1 < t \leqslant 2$. Однако это решение не продолжается влево за точку 1. Действительно, пусть оно продолжено каким-либо образом за точку 1. Тогда $y(1) = 1 - \int_{[1,2)} y(s) d\mathbf{p}$. Отсюда $y(1) = 1 + y(1)$, что является невозможным.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int\limits_a^t (d\mathbf{p})y(s) + g(t), \quad a \leqslant t \leqslant b_0, \ \ g \in \widetilde{C}[a, b_0]. \tag{22}$$

По следствию 1 уравнение (22) имеет единственное решение. В пространстве $\widetilde{C}[a, b_0]$ определим оператор $\mathscr{P}$ равенством

$$(\mathscr{P}u)(t) = \int\limits_a^t (d\mathbf{p})u(s), \quad u \in \widetilde{C}[a, b_0], \quad a \leqslant t \leqslant b_0. \tag{23}$$

Из (7) получаем $\|\mathscr{P}u\| \leqslant \mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) \sup_{t\in[a,b_0]} \|u(t)\|$. Поэтому оператор $\mathscr{P}$ ограничен. Из следствия 1 вытекает, что оператор $(E-\mathscr{P})^{-1}$ существует, всюду определен (и, следовательно, ограничен). Решение уравнения (22) имеет вид $y=(E-\mathscr{P})^{-1}g$.

Введем в рассмотрение оператор $U(t)=U(t,a)$, ставящий в соответствие каждому элементу $x\in H$ значение решения $y(t)$ уравнения (22) при $g(t)=x$. Функция $t\to U(t)x$ удовлетворяет уравнению

$$U(t)x = x + \int_a^t d\mathbf{p}(s)U(s)x, \quad x\in H, \quad a\leqslant t\leqslant b_0. \tag{24}$$

Функция $U(\cdot)x$ непрерывна слева и $U(a)x=x$. Равенства (23), (24) влекут

$$U(\cdot)x = (E-\mathscr{P})^{-1}x, \tag{25}$$

где $x\in H$ (здесь символ x обозначает как элемент из H, так и постоянную функцию, равную x). Через $\mathscr{U}$ обозначим оператор, ставящий в соответствие элементу $x\in H$ функцию $U(\cdot)x$.

Пусть $\mathscr{K}$ — множество функций $t\to U(t)x$, где $x\in H$. Линейное многообразие $\mathscr{K}$ замкнуто в $\widetilde{C}[a,b_0]$. Действительно, если последовательность $\{U(\cdot)x_n\}$ фундаментальна, то такой же является последовательность $\{x_n\}$. Поэтому $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу $x_0\in H$. Тогда последовательность $\{U(\cdot)x_n\}$ сходится в $\widetilde{C}[a,b_0]$ к $U(\cdot)x_0\in\mathscr{K}$. Из изложенного вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Оператор $\mathscr{U}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H на $\mathscr{K}$.*

Далее рассматривается интегральное уравнение

$$y(t) = y(a) + \int_a^t (d\mathbf{p})y(s) + \int_a^t (d\mathbf{m})f(s), \tag{26}$$

где f интегрируема по мере $\mathbf{m}$ и записывается как $f\in L_1(H,\mathbf{m};a,b)$.

Лемма 2. *Функция y тогда и только тогда является решением уравнения* (26), *когда выполняется равенство*

$$y(\cdot) = U(\cdot)y(a) + (E-\mathscr{P})^{-1}h, \quad h(t) = \int_a^t (d\mathbf{m})f(s). \tag{27}$$

Доказательство. Очевидно, функция y, определенная (27), является решением уравнения (26). Обратно, из (26), (25) следует

$$y = (E-\mathscr{P})^{-1}(y(a)+h) = (E-\mathscr{P})y(a) + (E-\mathscr{P})^{-1}h = U(\cdot)y(a)+(E-\mathscr{P})^{-1}h.$$

Лемма доказана. □

Пусть B — банахово пространство; $\Gamma : \widetilde{C}[a,b_0] \to B$ — линейное непрерывное отображение. Сужение оператора Γ на $\mathscr{K}$ обозначим $\widetilde{\Gamma}$.

Лемма 3. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}$ на B. Тогда для любой функции $f \in L_1(H,\mathbf{m};a,b)$ и любого элемента $c \in B$ уравнение* (26) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$\Gamma y = c. \tag{28}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что задача (26), (28) имеет не более одного решения. В (27) обозначим $z = (E-\mathscr{P})^{-1}h$, $y(a) = x$. Если y — решение задачи (26), (28), то $\Gamma y = \widetilde{\Gamma} U(\cdot)x + \Gamma z = c$. Отсюда $\widetilde{\Gamma}\mathscr{U}x = c - \Gamma z$. Из леммы 1 вытекает, что $\widetilde{\Gamma}\mathscr{U}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H на B. Поэтому $x = (\widetilde{\Gamma}\mathscr{U})^{-1}(c-\Gamma z)$. Из леммы 2 получим, что y — решение задачи (26), (28) тогда и только тогда, когда

$$y(\cdot) = U(\cdot)(\widetilde{\Gamma}\mathscr{U})^{-1}(c-\Gamma z)+z(\cdot), \quad z = (E-\mathscr{P})^{-1}h, \quad h(t)=\int\limits_a^t (d\mathbf{m})f(s). \tag{29}$$

Лемма доказана. $\square$

2. Сходимость решений граничных задач

Рассмотрим интегральные уравнения

$$y_k(t) = y_k(a) + \int\limits_a^t (d\mathbf{p}_k)y_k(s) + \int\limits_a^t (d\mathbf{m}_k)f_k(s), \quad a\leqslant t\leqslant b_0, \quad k=0,1,2,\dots, \tag{30}$$

с граничным условиями

$$\Gamma_k y_k = c_k. \tag{31}$$

Здесь операторные меры $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ имеют ограниченные вариации; $f_k \in L_1(H,\mathbf{m}_k;a,b)$; $\Gamma_k : \widetilde{C}[a,b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $k=0,1,2,\dots$; B — банахово пространство, $c_k \in B$.

Операторы $\mathscr{P}_k$, $U_k(t)$ $(k=0,1,2,\dots)$ определяются соответственно по формулам (23), (24), в которых мера $\mathbf{p}$ заменена на $\mathbf{p}_k$, $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}_k$, U на U_k. Через $\mathscr{U}_k$ обозначается оператор $x \to U_k(\cdot)x$ $(x \in H)$. Множество функций $t \to U_k(t)x$ обозначается $\mathscr{K}_k$. Сужение оператора Γ_k на $\mathscr{K}_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

Теорема 2. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}_0$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}_0$ на B и пусть $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) \to 0$, $f_n \to f_0$ равномерно на $[a,b]$,*

$c_n \to c$ в B при $n \to \infty$. Тогда при достаточно больших n задача (30), (31) *имеет единственное решение y_n и $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по t.*

Доказательство. Неравенство (7) влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\mathscr{P}_n\}$ к $\mathscr{P}_0$. Поэтому последовательность $\{(E-\mathscr{P}_n)^{-1}\}$ сходится к $(E-\mathscr{P}_0)^{-1}$ в равномерной операторной топологии. Тогда из (25) следует, что $\|U_n(t) - U_0(t)\| \to 0$ равномерно по t. Поэтому последовательность $\{\mathscr{U}_n\}$ сходится к $\mathscr{U}_0$ при $n \to \infty$. Это влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\widetilde{\Gamma}_n \mathscr{U}_n\}$ к $\widetilde{\Gamma}_0 \mathscr{U}_0$. По лемме 1 операторы $\mathscr{U}_k$ непрерывно и взаимно однозначно отображают H на $\mathscr{K}_k$. Поэтому $\widetilde{\Gamma}_0 \mathscr{U}_0 : H \to B$ — биективное отображение. Следовательно, при больших n таким же отображением является $\widetilde{\Gamma}_n \mathscr{U}_n : H \to B$. Поэтому $\widetilde{\Gamma}_n$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}_n$ на B. По лемме 3 задача (30), (31) имеет единственное решение при достаточно больших n. Согласно (29), это решение имеет вид

$$y_n(\cdot) = U_n(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_n \mathscr{U}_n)^{-1}(c_n - \Gamma_n z_n) + z_n(\cdot), \; z_n = (E-\mathscr{P}_n)^{-1} h_n, \;\; h_n(t) = \int_a^t (d\mathbf{m}_n) f_n(s). \quad (32)$$

По условию последовательность $\{f_n\}$ сходится к f_0 равномерно на $[a, b_0]$. Поэтому $f_n \in L_1(H, \mathbf{m}_0; a, b)$ и $f_0 \in L_1(H, \mathbf{m}_n; a, b)$ при достаточно больших n. Кроме того, последовательность $\{\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n)\}$ ограничена. Обозначим $h_k(t) = \int_a^t (d\mathbf{m}_k) f_k(s)$. Тогда

$$\|h_n(t) - h_0(t)\| = \left\| \int_a^t d(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) f_0(s) + \int_a^t (d\mathbf{m}_n)(f_n(s) - f_0(s)) \right\| \to 0$$

равномерно по t при $n \to \infty$. Поэтому $z_n = (E - \mathscr{P}_n)^{-1} h_n \to z_0 = (E - \mathscr{P}_0)^{-1} h_0$ в пространстве $\widetilde{C}[a, b_0]$. Отсюда и из (32) следует, что последовательность решений y_n задачи (30), (31) сходится при $n \to \infty$ в $\widetilde{C}[a, b_0]$ к решению y_0, задаваемому равенством

$$y_0(\cdot) = U_0(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_0 \mathscr{U}_0)^{-1}(c_0 - \Gamma_0 z_0) + z_0(\cdot), \quad z_0 = (E - \mathscr{P}_0)^{-1} h_0, \quad h_0(t) = \int_a^t (d\mathbf{m}_0) f_0(s).$$

Теорема доказана. □

Список литературы

1. Брук, В. М. О сходимости решений граничных задач для интегральных уравнений с операторными мерами / В. М. Брук // Таврический вестник информатики и математики. — Симферополь, 2015. — № 1. — С. 20–33.

BRUK, V. M. (2015) On the convergence of solutions of boundary value problems for integral equations with operator measures. *Taurida Journal of Computer science theory and Mathematics.* No 1. p. 20–33.

2. Кодлюк, Т. И. Предельные теоремы для одномерных краевых задач / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Укр. мат. журнал. — Киев, 2013. — Т. 65. — №1. — С. 70–81.

   KODLYUK, T. I., MIKHAILETS, V. A. and REVA, N. V. (2013) Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 65 (No 1). p. 77–90.

3. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 798 с.

   BEREZANSKI, Yu. M. (1968) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.