УДК: 517.518.23

MSC2010: 26A

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© Г. С. Балашова

НИУ «МЭИ» (Московский энергетический институт)
Кафедра высшей математики
Красноказарменная, 14, Москва, 111250, Российская Федерация
e-mail: *BalashovaGS@mpei.ru*

Study of Solvability of the Dirichlet Problem for Nonlinear Differential Equations of Infinite Order by the Method of Selection Main Part.

Balashova G. S.

Abstract. This paper studies the solvability of the Dirichlet problem for nonlinear differential equations of infinite order. Previously, this was considered a sequence of truncated equations and boundary conditions of order $2m$ and using the limit transition as the m tends to infinity have established the existence of a generalized solution of the original problem. In this article we propose a new approach, namely:to study the solvability of the Dirichlet problem for nonlinear differential equations of infinite order is proposed to introduce a differential operator of infinite order as a sum of two operators of infinite order, of which one main and the other subordinate to him. The basis of their comparison, the expected ratio of the corresponding energy of a Sobolev space of infinite order. Then when certain conditions for main and subordinate operators are able to prove a theorem on the existence of a generalized solution to the original equation, with any right part from the space conjugate to the space corresponding to the main operator. Namely, the main operator is the operator, the energy space which is compactly embedded in energy space corresponding to the second (called subordinates). Embedding theorems and compact attachment of a Sobolev space of infinite order, like a one-dimensional and multidimensional regions, rather fully developed by the author.

The obtained results are illustrated on the example of a particular Dirichlet problem for a differential equation of infinite order on two-dimensional square. It is shown how for a given two-dimensional matrix, describing the main operator and containing infinitely many zeros, built a regularized matrix with positive terms, defining the space of the matching element by element energy space corresponding to the main operator. This allowed just install the subordination of one operator to another and to check that all conditions of the theorem.

Keywords: *solvability, embedding theorems, spaces, infinite order, subordinate operator.*

Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения бесконечного порядка в ограниченной области ранее была установлена с помощью предельного перехода при $m \to \infty$ решений уравнений конечного порядка $2m$, левая и правая части которых представлялись частичными суммами правых и левых частей исходного уравнения (см. [1]).

В данной работе предложен новый подход, использующий представление дифференциального оператора бесконечного порядка в виде суммы двух операторов, один из которых главный, а другой ему подчиненный, в то время как оба оператора бесконечного порядка.

Итак, исследуем разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения бесконечного порядка в некоторой ограниченной области $G \subset R_\nu$, $\nu \geq 1$ с границей Γ, левая часть которого есть эллиптический оператор L_1 с возмущением L_2:

$$\begin{gathered} L_1(u) + L_2(u) \equiv \\ \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad x \in G, \end{gathered} \tag{1}$$

$$D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Так как оба оператора L_1 и L_2 имеют бесконечный порядок, поэтому принцип сравнения операторов конечного порядка для них не применим. В основу их сравнения положено сравнение пространств, являющихся областями определения этих операторов.

Определение 1. Дифференциальный оператор L_1 называется *главным* по сравнению с оператором L_2, в дальнейшем — *подчиненным*, если пространство

$$W^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \left\{ u(x) \in C^\infty(G): \quad \rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha u||_p^p < \infty \right\},$$

где $a_\alpha \geq 0$, $p > 1$ — некоторые действительные числа, $||\cdot||_p$ — норма в пространстве Лебега $\mathscr{L}_p(G)$, соответствующее оператору L_1, компактно вложено в пространство $W^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, соответствующее оператору L_2.

Теоремы вложения таких пространств получены автором в работах [2], [3]. Они позволяют из дифференциального оператора бесконечного порядка выделить главный. Однако в каждом конкретном случае это требует глубокого анализа поведения функций $A_\alpha(x, D^\gamma u)$ и $B_\alpha(x, D^\gamma u)$. В данной работе на этом не останавливаемся, а предполагаем, что исходный оператор представлен в виде суммы двух дифференциальных операторов бесконечного порядка (см. (1)).

Правая часть уравнения (1) принадлежит пространству

$$W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)} \equiv \left\{ h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha h_\alpha(x) : \quad \rho'(h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||h_\alpha||_{p'}^{p'} < \infty \right\},$$

(здесь $p' = \frac{p}{p-1}$, $h_\alpha(x) \in \mathscr{L}_{p'}(G)$).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $B_\alpha(x, \xi_\gamma)$ —- непрерывные функции аргументов $x \in G$ и всевозможных ξ_γ (α и γ —- целочисленные индексы, $|\gamma| \leq |\alpha|$), такие что для любых $x \in G$, ξ_γ и η_α справедливы неравенства:

$$\left| \sum_{|\alpha|=0}^{m} A_\alpha(x, \xi_\gamma)\eta_\alpha \right| \leq \delta_1 \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha(|\xi_\alpha|^{p-1} + 1)|\eta_\alpha|,$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} A_\alpha(x, \xi_\gamma)\xi_\alpha \geq \delta_2 \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha|\xi_\alpha|^p - K,$$

$$\left| \sum_{|\alpha|=0}^{m} B_\alpha(x, \xi_\gamma)\eta_\alpha \right| \leq \delta_3 \sum_{|\alpha|=0}^{m} b_\alpha(|\xi_\alpha|^{p-1} + 1)|\eta_\alpha|, \quad m = 0, 1, \dots ,$$

где $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $a_\alpha \geq 0$, $b_\alpha \geq 0$ — некоторые числовые последовательности; δ_1, δ_2, δ_3, K — положительные постоянные, не зависящие от m.

2) Пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \{u(x) \subset C_0^\infty(G), \rho(u) < \infty\}$ нетривиально.

3) Пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ компактно вложено в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$.

4) Для оператора L_1 существует непрерывный относительно $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$ обратный оператор $L_1^{-1} = R$.

5) Для любых $u_t(x) \in \overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, являющихся решениями задач

$$\begin{aligned} L_1(u) + t(L_2(u) - h(x)) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,\\ D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots , \end{aligned} \tag{3}$$

имеет место априорная оценка

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha u_t(x)||_p^p < K_0. \tag{4}$$

Тогда при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$ задача (1), (2) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Определение 2. Функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ называется *обобщенным решением* задачи (1), (2), если для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ выполняется тождество

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle A_\alpha(x, D^\gamma u), D^\alpha v\rangle + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u), D^\alpha v\rangle = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \langle h_\alpha, D^\alpha v\rangle .$$

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad x \in G, \tag{5}$$

$$D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots . \tag{6}$$

Известно (см. [4]), что при выполнении условий 1), 2) задача (5), (6) имеет единственное решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$. Кроме того, по условию 4) существует обратный оператор

$$R(h) = u, \tag{7}$$

непрерывный относительно $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$.

Установим, что оператор $L_2(u)$ непрерывно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$. Для этого достаточно показать, что оператор $L_2(u)$ всякую последовательность $\{u_k(x)\}$, сходящуюся к $u_0(x)$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, переводит в последовательность

$$L_2(u_k) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u_k), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

сходящуюся равномерно на единичном шаре $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, т. е. для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ с нормой

$$|||v(x)|||_{\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}} \equiv \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha v(x)||_p^p \right)^{1/p} \leq 1 \tag{8}$$

имеет место соотношение

$$\langle L_2(u_k), v(x)\rangle = \textstyle\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u_k), D^\alpha v(x)\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \\ \xrightarrow[k\to\infty]{} \textstyle\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u_0), D^\alpha v(x)\rangle .$$

Из сходимости последовательности $\{u_k(x)\}$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ на шаре (8) следует, что для любого α последовательность $\{D^\alpha u_k\}$ является его компактным подмножеством, а потому из критерия компактности множества, принадлежащего $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ (см. [5]), имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{|\alpha|=N}^{\infty} b_\alpha ||D^\alpha u_k(x)||_p^p < \varepsilon. \tag{9}$$

Проведем следующую оценку

$$\left| \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \int_G \left(B_\alpha(x, D^\gamma u_k) - B_\alpha(x, D^\gamma u_0) \right) D^\alpha v(x) dx \right| \leq$$
$$\leq \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \int_G \left| B_\alpha(x, D^\gamma u_k) - B_\alpha(x, D^\gamma u_0) \right| \cdot \left| D^\alpha v(x) \right| dx +$$
$$+ \left| \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \int_G B_\alpha(x, D^\gamma u_k) D^\alpha v(x) dx \right| + \left| \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \int_G B_\alpha(x, D^\gamma u_0) D^\alpha v(x) dx \right| =$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

В силу сходимости $\{u_k(x)\}$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ следует, что для любого α $\{D^\alpha u_k(x)\}$ равномерно стремится к $D^\alpha u_0(x)$ при $k \to \infty$, и так как $B_\alpha(x, \xi_\gamma)$ — непрерывные функции своих аргументов, то каждое из слагаемых, входящих в Σ_1, для достаточно больших k как угодно мало, при этом Σ_1 содержит конечное число таких членов, потому $|\Sigma_1|$ может быть сделан меньше любого $\varepsilon > 0$.

Проведя аналогичные оценки для $|\Sigma_2|$ и $|\Sigma_3|$ с использованием условий 1), 3) теоремы, неравенства Гёльдера, соотношений (8), (9) и критерия компактности вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, получим $|\Sigma_2|$ и $|\Sigma_3|$ как угодно малыми для достаточно больших k. Таким образом, непрерывность оператора L_2, действующего из $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$, доказана.

Далее рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = -t \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_\alpha(x, D^\gamma v) - h(x) \right), \tag{10}$$

где $v(x)$ — некоторая функция из $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, t — число из промежутка $[0; 1]$. В силу установленного выше свойства оператора L_2 правая часть уравнения (10) есть элемент пространства $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$, и потому оператор R из (7), примененный к правой части уравнения (10), представим в виде

$$R_t(v) = R\left(-t\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma v) + th\right).$$

Очевидно, что решением исходной задачи (1) является неподвижная точка отображения $v \to R_1(v)$, т. е. $v = R_1(v)$. Оператор $R_t(v)$, действующий из $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, можно представить как суперпозицию следующих операторов

$$v \to Jv \to tL_2(Jv) - th \to R(tL_2(Jv) - th) = R_t v = u,$$

где J — оператор вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$. Из условия 3) следует, что J вполне непрерывен, оператор $L_2(u)$, как доказано выше, тоже непрерывен и R непрерывен по условию 4), то R_t вполне непрерывен.

Заметим, что $R_0(v) = 0$ при $t = 0$, так как единственным решением задачи (5), (6) при $h = 0$ является функция $v(x) \equiv 0$. Это означает, что степень покрытия нуля [6] при отображении $v \to v - R_0(v)$ равна единице. Тогда в силу условия 5) для всех $v(x)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha v(x)||_p^p = 2K_0,$$

$v - R_t(v) \neq 0$. В самом деле, из условия 5) следует, что все решения задачи (3) имеют в $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ норму, не превосходящую $K_0^{1/p}$ при любом $t \in [0; 1]$. Поэтому степень покрытия нуля при отображении $v \to v - R_t(v)$ шара

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha v(x)||_p^p\right)^{1/p} = (2K_0)^{1/p}$$

не зависит от t и при $t = 0$ равна единице, то и при $t = 1$ она также равна единице. Следовательно, существует такая функция $v(x)$, что $v(x) - R_1(v(x)) = 0$. Функция $u(x) \equiv v(x)$ и является решением задачи (1), (2). Теорема доказана. □

Замечание 1. Нахождение условий, при которых выполняется 4), представляет самостоятельный интерес. В работе [7] дано простое достаточное условие непрерывной обратимости оператора $L_1(u)$ при $p \geq 2$, именно

$$\frac{\partial A_\alpha(x, \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} > K a_\alpha |\xi_\alpha|^{p-2}, \quad K = \text{const}. \tag{11}$$

Кроме того, в [9] доказана непрерывная обратимость оператора

$$L(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha |D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u), \quad \text{при } p > 1.$$

Замечание 2. Приведем одно из легко проверяемых достаточных условий выполнения пункта 4). Пусть функция $u_t(x)$ является решением уравнения (3), т. е. удовлетворяет равенству

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle A_\alpha(x, D^\gamma u_t), D^\alpha u_t \rangle = -t \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u_t), D^\alpha u_t \rangle + t \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle a_\alpha h_\alpha, D^\alpha u_t \rangle . \tag{12}$$

Используя условие 1), неравенство Гёльдера, соотношение (12) и обозначая через $||\mathscr{A}||$ норму оператора вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, при естественном предположении $\sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha ||D^\alpha u_t||_p^p \geq 1$, получим, что для выполнения условия 4) достаточно, чтобы

$$\delta_2 - (1 + (mesG)^{1/p'})\delta_3 ||\mathscr{A}||^p > 0. \tag{13}$$

Пример. Рассмотрим в квадрате $G = [0; 1] \times [0; 1]$ следующую задачу:

$$\begin{gathered} Lu = L_1(u) + \lambda L_2(u) = \textstyle\sum_{k=0}^\infty (-1)^k D_x^k (2^{-k^2} |D_x^k u|^{p-2} D_x^k u) + \\ + \textstyle\sum_{m=0}^\infty (-1)^m D_y^m (2^{-m^2} |D_y^m u|^{p-2} D_y^m u) + \\ + \textstyle\sum_{k,\, m=1}^\infty D_{xy}^{2k+2m} (2^{-2(k+m)^2} |D_{xy}^{2k-2m} u|^{p-2} D_{xy}^{2k+2m} u) + \\ + \lambda \textstyle\sum_{k,\, m=0}^\infty (-1)^{k+m} D_{xy}^{k+m} \left(\frac{(x-0,5)(y-0,5)}{2^{(k+m)^3}} |D_{xy}^{k+m} u|^{p-2} D_{xy}^{k+m} u \right) = h(x), \end{gathered} \tag{14}$$

$$D_{xy}^{k+m} u(x, y)\big|_\Gamma = 0, \quad k,\ m = 0, 1, \ldots\ . \tag{15}$$

Здесь $p > 1$, $\lambda \in R$ — некоторый параметр, $h(x) \in W^{-\infty}\{a_{km}, p'\}_{(G)}$.

Оператор $L(u)$ такой, что из известных результатов [4] не следует разрешимость задачи (14), (15). В самом деле, для $k = m = 2n + 1$ нарушается условие коэрцитивности для оператора L. Для оператора $L_1(u)$ условие 1) выполнено с $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $K = 0$ и последовательностью

$$a_{km} = \begin{cases} 2^{-k^2}, \quad k = 0, 1, \ldots\ , \ \ m = 0; \\ 2^{-m^2}, \quad k = 0, \ \ m = 0, 1, 2; \\ 2^{-(k+m)^2}, \quad k = 2j, \ \ m = 2s, \ \ s, j = 1, 2, \ldots; \\ 0, \quad k = 2j + 1 \ \ 8; 8 \ \ m = 2s + 1, \ \ s, j = 0, 1, \ldots\ . \end{cases}$$

Для оператора $L_2(u)$ условие 1) выполнено с $\delta_3 = 1$ и $b_{km} = |\lambda| 2^{-(k+m)^3}$.

Для проверки условия 2) строится выпуклая регуляризация посредством логарифмов последовательности

$$M_n = \left(\sum_{k+m=n} a_{km} \right)^{-1} \geq 2^{n^2} \frac{1}{n},$$

для которой $M_n^c \geq 2^{n^2}\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty}(M_n^c)^{-\frac{1}{np}} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} < \infty,$$

т. е. пространство $W^\infty\{a_{km}, p\}$ нетривиально.

Для проверки условия 3) проводится регуляризация двумерной матрицы $\{a_{km}\}$ методом, предложенным в [8], т. е. сначала проводится регуляризация по переменному индексу k при фиксированном m, получаем матрицу $\{a_{km}^{(1)}\}$, в которой еще есть нулевые элементы. Затем проводится регуляризация матрицы $\{a_{km}^{(1)}\}$ по переменному индексу m при фиксированном k. В результате все элементы $a_{km}^{(2)} > 0$ для всех k и m, причем $W^\infty\{a_{km}^{(2)}, p\} = W^\infty\{a_{km}, p\}$ поэлементно. При этом

$$||u(x,y)||^p_{\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km}^{(2)},p\}_{(G)}} \leq 2^{2(p+2)}||u(x,y)||^p_{\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km},p\}_{(G)}}. \tag{16}$$

Тогда для компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km}^{(2)}, p\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_{km}, p\}_{(G)}$ достаточно убедиться, что

$$\lim_{k,m\to\infty} b_{km}(a_{km}^{(2)})^{-1} = 0.$$

Выполнение условия 4) следует из вида оператора $L_1(u)$ и замечания 1. Остается выяснить при каких ограничениях выполнено условие 5). Как указано в замечании 2, для этого можно использовать условие (13) и соотношение (16)

$$||\mathscr{A}||^p \leq 2^{2(p+2)} \sup_{u\in\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km}^{(2)},p\}_{(G)}} \frac{\sum_{k+m=0}^{\infty} b_{km}||D_{xy}^{k+m}u||_p^p}{\sum_{k+m=0}^{\infty} a_{km}^{(2)}||D_{xy}^{k+m}u||_p^p} \leq 4|\lambda|2^{2(p+2)}. \tag{17}$$

Из условия (13) и оценки (17) следует, что при

$$|\lambda| < 2^{-2(p+3)} \tag{18}$$

условие 5) выполнено. Таким образом, при любом λ, удовлетворяющем условию (18), задача (14), (15) имеет по крайней мере одно решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_{km}, p'\}_{(G)}$.

Список литературы

1. Балашова, Г. С. Равномерная корректность семейства нелинейных краевых задач бесконечного порядка / Г. С. Балашова, Ю. А. Дубинский // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 4. — С. 610 – 620.

BALASHOVA, G. and DUBINSKY, Yu. (1994) The uniform correctness of a family of nonlinear boundary value problems of infinite order.. *Differential equations.*. 30 (4). p. 610–620..

2. Балашова, Г. С. Теоремы вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций нескольких переменных / Г. С. Балашова // Математические заметки. — 1990. — Т. 47. — № 6. — С. 3–14.

   BALASHOVA, G. (1990) Embedding theorems for Banach spaces of infinitely differentiable functions of several variables. *Mathematical notes.* 47 (6). p. 3–14..

3. Балашова, Г. С. Об условиях продолжения следа и вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций / Г. С. Балашова // Математический сборник. — 1993. — Т. 184. — № 1. — С. 105–128.

   BALASHOVA, G. (1993) On the conditions for the continuation of the trail and attachments for Banach spaces of infinitely differentiable functions. *Mathematical sbornik.* 184 (1). p. 105–128..

4. Дубинский, Ю. А. Пространства Соболева бесконечного порядка и поведение решений некоторых краевых задач при неограниченном возрастании порядка уравнения / Ю. А. Дубинский // Математический сборник. — 1975. — Т. 98. — № 2. — С. 163–184.

   DUBINSKIJ, Ju. (1975) Sobolev Spaces of infinite order and the behavior of solutions of some boundary value problems with unbounded increase of the order of the equations. *Mathematical sbornik.* 98 (2). p. 163–184.

5. Дубинский, Ю. А. Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Применения к пространствам Соболева бесконечного порядка / Ю. А. Дубинский // Математический сборник. — 1979. — Т. 110 (152). — № 3. — С. 428–439.

   DUBINSKIJ, Ju. (1979) Limits of Banach spaces. Embedding theorems. Application to a Sobolev space of infinite order. *Mathematical sbornik.* 110 (152) (3). p. 428–439.

6. Красносельский, М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Ростехиздат, 1956. — 392 с.

   KRASNOSELSKII, M. (1956) *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations.* Moscow: Rostehizdat.

7. Дубинский, Ю. А. О нетривиальности некоторых классов функций и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка / Ю. А. Дубинский // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 2. — С. 231–240.

   DUBINSKY, Yu. (1974) On the triviality of certain classes of functions and the solvability of nonlinear differential equations of infinite order. *Differential equations.* 10 (2). p. 231–240.

8. DUBINSKIJ, Ju. (1986) *Sobolev Spaces of infinite Order and differential equtions.* Leipzig.BSB.Tubner.

9. Мандельбройт, С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения / С. Мандельбройт. — М.: Издательство иностранной литературы, 1955. — 268 с.

   MANDELBROJT, S. (1952) *Adjacent rows. Regularization of sequences. Applications..* Moscow: MIR.